

А. М. Турінов, О. М. Галдіна

ПОСІБНИК ДО ВИВЧЕННЯ КУРСУ
«МЕТОДИ МАТЕМАТИЧНОЇ ФІЗИКИ»

2020

Міністерство освіти і науки України
Дніпровський національний університет
імені Олеся Гончара

А. М. Турінов, О. М. Галдіна

ПОСІБНИК ДО ВИВЧЕННЯ КУРСУ «МЕТОДИ МАТЕМАТИЧНОЇ ФІЗИКИ»

*Ухвалено на вченій раді
протокол № 8
від 30 січня 2020 р.*

Дніпро
РВВ ДНУ
2020

УДК 530.1 (075.8)

Т 86

Рецензенти: д-р фіз.-мат. наук, проф. В. Ф. Башев

д-р техн. наук, проф. В. О. Заблудовський

Т 86 Турінов, А. М. Посібник до вивчення курсу «Методи математичної фізики» / А. М. Турінов, О. М. Галдіна. – Дніпро: РВВ ДНУ, 2020. – 112 с.

Розглянуто класичні розділи математичної фізики: «Класифікація лінійних диференціальних рівнянь другого порядку в частинних похідних», «Класифікація основних рівнянь математичної фізики», «Одновимірне хвильове рівняння», «Багатовимірне хвильове рівняння», «Рівняння теплопровідності», «Рівняння для стаціонарних розв'язків динамічних задач». Для глибшого засвоєння матеріалу введено розділ «Огляд найважливіших спеціальних функцій». До кожного розділу стисло наведено основні теоретичні відомості, а також приклади розв'язання практичних задач.

Для студентів фізичних і математичних спеціальностей ДНУ.

Темплан 2020, поз. 11

Навчальне видання

Андрій Миколайович Турінов

Олександра Миколаївна Галдіна

**Посібник до вивчення курсу
«Методи математичної фізики»**

Редактор Д. І. Вергазова

Техредактор Т. І. Севост'янова

Коректор О. В. Бец

Підписано до друку 10.03.2020. Формат 60х84/16. Папір друкарський.

Друк плоский. Ум. друк. арк. 6,5. Ум. фарбовідб. 6,5. Обл.-вид. арк. 4,2.

Тираж 20 пр. Зам. № 52.

РВВ ДНУ, просп. Гагаріна, 72, м. Дніпро, 49010.

ПП «Ліра ЛТД», вул. Наукова, 5, м. Дніпро, 49107.

Свідоцтво про внесення до державного реєстру

серія ДК № 6042 від 26.02.2018 р.

© Турінов А.М., Галдіна О.М., 2020

Вступ

Фізичні закони, що виражають зв'язок між фізичними величинами, формулюють, виходячи зі спостережень за природними явищами або проведених експериментів. Іноді ці закони вдається записати у вигляді алгебричних співвідношень (закон Ома, рівняння стану для ідеального газу й багато інших законів елементарної фізики), але найчастіше вони виражають зв'язок між змінами фізичних величин у просторі й у часі. Отже, якщо фізична величина в загальному випадку є функція однієї часової й трьох просторових змінних, то зміни цієї величини математично виражаються через частинні похідні відповідної функції за часовою і просторовими змінними. У підсумку фізичні закони набувають вигляду диференціальних рівнянь у частинних похідних. Це може бути диференціальне рівняння для однієї функції від декількох змінних (рівняння Пуассона (Лапласа) в електростатиці, хвильове рівняння, рівняння теплопровідності, рівняння Шредінгера у квантовій механіці й т.д.) або, найчастіше, система диференціальних рівнянь для кількох функцій від декількох змінних (система рівнянь Ньютона в механіці, рівняння Максвелла в електродинаміці, рівняння Ейлера в гідродинаміці, чотирикомпонентне рівняння Дірака у квантовій механіці та ін.). Усі рівняння такого типу прийнято називати **рівняннями математичної фізики** — саме їх розгляду і присвячено пропонований посібник.

Структура курсу «Рівняння математичної фізики» має відповідати двом основним завданням математичної фізики. По-перше, якщо задано правило визначення фізичної величини, що нас цікавить, у будь-якій точці простору, тобто задано поле, — потрібно встановити характер цього поля, тобто швидкість зміни від точки до точки.

Для вивчення диференціальних властивостей полів послуговуються математичною теорією поля. По-друге, необхідно знайти деяку фізичну величину, тобто визначити конкретний вид математичного поля, якщо відомі умови, у яких перебуває матеріальний об'єкт або відбувається фізичний процес.

Для вивчення методів складання, передусім інтегрування рівнянь, які визначають відповідні шукані функції координат і часу, слід застосовувати теорію диференціальних рівнянь у частинних похідних. Сукупність теорії поля й теорії диференціальних рівнянь у частинних похідних утворює так звану **класичну математичну фізику**.

1. Класифікація лінійних диференціальних рівнянь другого порядку в частинних похідних. Канонічний вигляд

Рівняння математичної фізики являють собою нелінійні диференціальні рівняння, але у разі їх лінеаризації можна одержати вже лінійні рівняння фізичних процесів. Історично сталося так, що основну увагу в класичній фізиці приділяють лінійним рівнянням, навіть після появи таких новітніх розділів, як квантова механіка. На сьогодні переважна більшість рівнянь, що описують широкий спектр фізичних явищ у найрізноманітніших розділах сучасної фізики, є лінійні рівняння математичної фізики. Для вивчення цих рівнянь було розвинено математичний апарат, за допомогою якого було докладно досліджено їх властивості і знайдено ефективні аналітичні й числові методи побудови їх розв'язків. Ситуація з нелінійними рівняннями виявилася дещо складнішою. Накопичений експериментальний досвід дозволяє стверджувати, що багато найважливіших фізичних явищ (термоядерні реакції, численні магнітні явища, кулясті блискавки, цунамі й т.д.) можна адекватно описати лише у межах нелінійних моделей. На жаль, наразі математичний апарат для вивчення нелінійних рівнянь перебуває у процесі побудови, деякі їх важливі властивості ще не з'ясовано остаточно, тому розв'язки вдалося одержати тільки для невеликого класу рівнянь, і то лише частинні. З огляду на це у пропонованому посібнику розглянуто тільки лінійні рівняння математичної фізики.

Із розвитком фізики як науки було виявлено, що переважну кількість фізичних явищ можна описати досить вузьким класом рівнянь, а саме диференціальними рівняннями другого порядку. Винятки лише підтверджують правило: рівняння четвертого порядку в теорії пружності, рівняння третього порядку — відоме *рівняння Кортевега – де Фріза* у нелінійних коливаннях і низка таких самих «екзотичних» прикладів. Тому на першому етапі вивчення математичної фізики можна обмежитися лінійними диференціальними рівняннями другого порядку. Вивчення таких рівнянь доцільно починати зі зведення їх до найпростішого *канонічного вигляду*.

Лінійне рівняння другого порядку

$$\sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \Omega(x, u, \text{grad } u) = 0 \quad (1.1)$$

має канонічний вигляд у разі виконання умови

$$a_{ij}(x) = \begin{cases} 1 & \text{за } i \neq j, \\ 0, \pm 1 & \text{за } i = j. \end{cases}$$

Рівняння, записане в канонічному вигляді, завжди являє собою один із трьох можливих типів:

рівняння еліптичного типу: $\sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_i} + \Omega = 0$, що містять суми других похідних, число яких дорівнює n ;

рівняння гіперболічного типу: $\sum_{i=1}^r \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_i} - \sum_{i=r+1}^n \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_i} + \Omega = 0$, $0 < r < n$, другі похідні входять у такі рівняння із різними знаками, але їх число знову ж таки дорівнює n ;

рівняння параболічного типу: $\sum_{i=1}^r \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_i} - \sum_{i=r+1}^s \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_i} + \Omega = 0$, $0 < r < s < n$, частина других похідних у цих рівняннях відсутня взагалі.

Будь-яке рівняння (1.1) з довільними коефіцієнтами можна звести до канонічного вигляду в будь-якій точці $x = \zeta$, удавшись до заміни незалежних змінних: $y_k = y_k(x)$ за умови, що $\det \left| \frac{\partial y_k}{\partial x_i} \right| \neq 0$. Виразивши похідні в (1.1) через похідні нової функції $\tilde{u}$ за новими змінними y_k , одержимо перетворене рівняння тієї самої структури, що й вихідне:

$$\sum_{k,l=1}^n \tilde{a}_{kl} \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial y_k \partial y_l} + \tilde{\Omega} = 0. \quad (1.2)$$

Нові коефіцієнти $\tilde{a}_{kl}(y)$ рівняння (1.2) виразимо через старі коефіцієнти $a_{ij}(x)$ рівняння (1.1):

$$\tilde{a}_{kl} = \sum_{i,j=1}^n a_{ij} \frac{\partial y_k}{\partial x_i} \frac{\partial y_l}{\partial x_j}. \quad (1.3)$$

Необхідно звернути особливу увагу, що закон перетворення коефіцієнтів рівняння збігається з відомим із лінійної алгебри законом перетворення коефіцієнтів квадратичної форми за неособливої лінійної заміни змінних. Дійсно, якщо задано квадратичну форму

$$K(p, p) = \sum_{i,j=1}^n a_{ij} p_i p_j \quad (1.4)$$

і зроблено невироджене лінійне перетворення S від старих змінних p_i до нових змінних q_k : $p_i = \sum_{k=1}^n s_{ik} q_k$ за умови, що $\det |S| \neq 0$, то нова квадратична форма набуде вигляду

$$K(q, q) = \sum_{k,l=1}^n \tilde{a}_{kl} q_k q_l, \text{ де } \tilde{a}_{kl} = \sum_{i,j=1}^n a_{ij} s_{ik} s_{jl}. \quad (1.5)$$

Порівнявши (1.5) з коефіцієнтами з (1.3), матимемо вираз

$$s_{ik} = \left. \frac{\partial y_k}{\partial x_i} \right|_{x=\zeta}.$$

Як відомо з лінійної алгебри, перетворення, що приводить квадратичну форму до канонічного вигляду, завжди можна знайти або *методом Лагранжа* (виділення повних квадратів), або *методом Якобі* (приведення матриці до трикутного вигляду). Незважаючи на те що це перетворення визначено не єдиним способом, тип рівняння (1.1) у точці визначуваний однозначно на підставі *закону інерції квадратичної форми*. Відповідно до цього закону число від'ємних і додатних доданків у канонічному вигляді квадратичної форми не залежить від конкретного вибору перетворення.

Доведений факт важливий з теоретичного погляду, на відміну від практичного, оскільки рівняння математичної фізики завжди потрібно розглядати в деякій області зміни змінних, а не в окремій точці.

1.1. Випадок двох незалежних змінних

Задача зведення рівняння (1.1) до канонічного вигляду в області за допомогою перетворення незалежних змінних у разі числа змінних $n > 2$ може не мати розв'язку, оскільки на n шуканих функцій $y_k(x)$ накладають $n^2/2 + n - 1$ умови, що впливають із вимог $\tilde{a}_{kl} = 0, k \neq l, \tilde{a}_{kl} = 0, \pm 1, k = l$.

Будь-яке лінійне диференціальне рівняння другого порядку з двома незалежними змінними в загальному випадку має такий вигляд:

$$a(x, y) u_{xx} + 2b(x, y) u_{xy} + c(x, y) u_{yy} + \Omega(x, y, u, u_x, u_y) = 0. \quad (1.6)$$

Обов'язковою вимогою є задання функцій $a(x, y)$, $b(x, y)$, $c(x, y)$ в деякій області та наявність там неперервних похідних до другого порядку включно.

Звести лінійне рівняння до канонічного вигляду не в окремій точці, а в цілій області для двох незалежних змінних можна завжди. Загальна заміна змінних:

$$\xi = \xi(x, y), \quad \eta = \eta(x, y),$$

де ξ і η — довільні, двічі неперервно диференційовані функції з визначником Остроградського, відмінним від нуля:

$$\frac{D(\xi, \eta)}{D(x, y)} = \begin{vmatrix} \xi_x & \xi_y \\ \eta_x & \eta_y \end{vmatrix} \neq 0.$$

Це необхідна й достатня умова зворотного перетворення $\begin{cases} x = x(\xi, \eta), \\ y = y(\xi, \eta). \end{cases}$

Із урахуванням знайдених частинних похідних

$$u_x = u_\xi \xi_x + u_\eta \eta_x;$$

$$u_y = u_\xi \xi_y + u_\eta \eta_y;$$

$$u_{xx} = u_{\xi\xi} \xi_x^2 + 2u_{\xi\eta} \xi_x \eta_x + u_{\eta\eta} \eta_x^2 + u_\xi \xi_{xx} + u_\eta \eta_{xx};$$

$$u_{yy} = u_{\xi\xi} \xi_y^2 + 2u_{\xi\eta} \xi_y \eta_y + u_{\eta\eta} \eta_y^2 + u_\xi \xi_{yy} + u_\eta \eta_{yy};$$

$$u_{xy} = u_{\xi\xi} \xi_x \xi_y + u_{\xi\eta} (\xi_x \eta_y + \xi_y \eta_x) + u_{\eta\eta} \eta_x \eta_y + u_\xi \xi_{xy} + u_\eta \eta_{xy}$$

загальний вигляд рівняння (1.6) трансформується у вираз

$$\begin{aligned} & \left(\underbrace{a\xi_x^2 + 2b\xi_x \xi_y + c\xi_y^2}_{\tilde{a}} \right) u_{\xi\xi} + 2 \left(\underbrace{a\xi_x \eta_x + b(\xi_x \eta_y + \xi_y \eta_x) + c\xi_y \eta_y}_{\tilde{b}} \right) u_{\xi\eta} + \\ & + \left(\underbrace{a\eta_x^2 + 2b\eta_x \eta_y + c\eta_y^2}_{\tilde{c}} \right) u_{\eta\eta} + \tilde{\Omega}(\xi, \eta, u, u_\xi, u_\eta) = 0. \end{aligned} \quad (1.7)$$

У результаті лінійне рівняння знову набуло лінійного вигляду. Єдиний спосіб спрощення в цьому разі полягає у специфічному виборі функцій ξ і η , що забезпечує перетворення на нуль коефіцієнтів нового рівняння (1.7). Вирішення цього питання еквівалентно, наприклад, розв'язку такого рівняння

$$a\xi_x^2 + 2b\xi_x \xi_y + c\xi_y^2 = 0.$$

Розділивши його на ξ_y^2 , матимемо вираз

$$a \left(\frac{\xi_x}{\xi_y} \right)^2 + 2b \left(\frac{\xi_x}{\xi_y} \right) + c = 0,$$

розв'язок якого $\frac{\xi_x}{\xi_y} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - ac}}{a}$ у загальному випадку отримати не можна.

До вирішення цього питання можна підійти інакше.

Лема 1.1. Візьмемо рівняння

$$az_x^2 + 2bz_xz_y + cz_y^2 = 0, \quad (1.8)$$

для якого відомий частинний розв'язок $z = \varphi(x, y)$. Тоді $\varphi(x, y) = C$ буде загальним першим інтегралом для звичайного диференціального рівняння

$$ady^2 - 2bxdy + cdx^2 = 0. \quad (1.9)$$

І навпаки, якщо $\varphi(x, y) = C$ є загальний перший інтеграл рівняння (1.9), то $z = \varphi(x, y)$ буде розв'язком першого рівняння (1.8).

Доведення. Перетворимо рівняння (1.9) до вигляду

$$a \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 - 2b \frac{dy}{dx} + c = 0. \quad (1.10)$$

Нехай $\varphi(x, y) = C$ — загальний перший інтеграл цього рівняння. Оберемо довільну точку (x_0, y_0) і C так, щоб $\varphi(x_0, y_0) = C_0$. Це неявне задання функції $y = f(x)$, причому $f(x_0) = y_0$, але для неявно заданих функцій

$$\frac{dy}{dx} = - \frac{\partial \varphi / \partial x}{\partial \varphi / \partial y} \Big|_{y=f(x)},$$

тому що $dC_0 = 0 = d\varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial x} dx + \frac{\partial \varphi}{\partial y} dy$. Підставивши це визначення в рівняння (1.6), отримаємо

$$a \left(\frac{\partial \varphi / \partial x}{\partial \varphi / \partial y} \right)^2 + 2b \left(\frac{\partial \varphi / \partial x}{\partial \varphi / \partial y} \right) + c = 0 \Rightarrow a\varphi_x^2 + 2b\varphi_x\varphi_y + c\varphi_y^2 = 0.$$

Оскільки точку (x_0, y_0) було обрано довільно, то $z = \varphi(x, y)$ задовольняє рівняння тотожно. ■

Отже, для визначення нових змінних слід розв'язати рівняння

$$\frac{dy}{dx} = \frac{b \pm \sqrt{b^2 - ac}}{a}, \quad (1.11)$$

розв'язком якого можуть бути інтеграли $J_1: \Psi(x, y) = \text{const}$ і $J_2: \Theta(x, y) = \text{const}$. Рівняння (1.11) називають **рівнянням характеристик**. Тип рівняння в області його визначення визначають знаком¹ функції

$$D(x, y) = b^2(x, y) - a(x, y)c(x, y),$$

яку називають *дискримінантом* рівняння (1.11). Нові змінні ξ і η обирають по-різному для кожного із трьох можливих випадків.

$D > 0$ – **рівняння гіперболічного типу**. Розв'язавши два рівняння (1.12), визначимо два перші інтеграли. Як ξ і η візьмемо інтеграли J_1 і J_2 :

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} = \frac{b + \sqrt{D}}{a} &\Rightarrow \xi(x, y) = J_1(x, y) \Rightarrow \tilde{a} = 0, \\ \frac{dy}{dx} = \frac{b - \sqrt{D}}{a} &\Rightarrow \eta(x, y) = J_2(x, y) \Rightarrow \tilde{c} = 0. \end{aligned} \quad (1.12)$$

У нових змінних рівняння (1.6) набуде вигляду

$$u_{\xi\eta} + \tilde{\Omega}(\xi, \eta, u, u_\xi, u_\eta) = 0.$$

Це *друга канонічна форма* для рівняння гіперболічного типу. Вдавшись до додаткової заміни $\sigma = \xi + \eta$, $\rho = \xi - \eta$, отримаємо

$$u_{\sigma\sigma} - u_{\rho\rho} + \tilde{\Psi}(\sigma, \rho, u, u_\sigma, u_\rho) = 0.$$

Це *перша канонічна форма* для рівняння гіперболічного типу.

$D = 0$ – **рівняння параболічного типу**. Розв'язавши рівняння (1.13), знайдемо один інтеграл. Як η візьмемо цей інтеграл

$$\frac{dy}{dx} = \frac{b}{a} \Rightarrow \eta(x, y) = J(x, y) \Rightarrow \tilde{c} = 0, \quad (1.13)$$

а як другу змінну — будь-яку функцію, лінійно незалежну від η , наприклад $\xi(x, y) = x \Rightarrow \tilde{b} = 0$. Рівняння (1.6) набуде вигляду

$$u_{\xi\xi} + \tilde{\Omega}(\xi, \eta, u, u_\xi, u_\eta) = 0.$$

$D < 0$ – **рівняння еліптичного типу**. Розв'язавши рівняння (1.14) з комплексними коефіцієнтами, знайдемо комплексний інтеграл $J(x, y)$. Як ξ

¹Знак дискримінанта можна обрати як класифікатор типу рівняння. Дійсно, прямим обчисленням можна перевірити, що $\tilde{b}^2 - \tilde{a}\tilde{c} = (b^2 - ac) \left| \frac{D(\xi, \eta)}{D(x, y)} \right|^2$, де $\left| \frac{D(\xi, \eta)}{D(x, y)} \right|$ — яacobіан перетворення, тобто визначник Остроградського.

і η візьмемо дійсну й уявну частини інтеграла:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{b + i\sqrt{-d}}{a} \Rightarrow \begin{cases} \xi(x, y) = \operatorname{Re} J(x, y), \\ \eta(x, y) = \operatorname{Im} J(x, y); \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \tilde{b} = 0, \\ \tilde{a} = \tilde{c}. \end{cases} \quad (1.14)$$

Після перетворень рівняння (1.6) набуде вигляду

$$u_{\xi\xi} + u_{\eta\eta} + \tilde{\Omega}(\xi, \eta, u, u_{\xi}, u_{\eta}) = 0.$$

Легко перевірити, що якобіан перетворення не дорівнює нулю у всіх випадках.

Якщо функція $D(x, y)$ не зберігає знак у всій області, то ми маємо справу з так званими *виродженими рівняннями і рівняннями змішаного типу*.

Приклад 1. Звести до канонічного вигляду **рівняння Трікомі**:

$$u_{xx} + xu_{yy} = 0. \quad (1.15)$$

Розв'язання. У нашому випадку $a = 1$, $b = 0$, $c = x$ і $D = -x$.

Умова $D > 0 \Leftrightarrow x < 0$ визначає ліву півплощину декартової системи координат. Розв'язавши лінійні диференціальні рівняння (1.12), знайдемо інтеграли, а отже, і нові змінні:

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} = \sqrt{-x} &\Rightarrow \xi = y + \frac{2}{3}(-x)^{3/2}, \\ \frac{dy}{dx} = -\sqrt{-x} &\Rightarrow \eta = y - \frac{2}{3}(-x)^{3/2}; \end{aligned} \Rightarrow \begin{cases} \sigma = 2y, \\ \rho = \frac{4}{3}(-x)^{3/2}. \end{cases}$$

Перетворивши похідні, одержимо систему рівнянь

$$\begin{aligned} u_x &= u_{\sigma}\sigma_x + u_{\rho}\rho_x = -2u_{\rho}(-x)^{\frac{1}{2}}, \\ u_y &= u_{\sigma}\sigma_y + u_{\rho}\rho_y = 2u_{\sigma}, \\ u_{xx} &= u_{\sigma\sigma}\sigma_x^2 + 2u_{\sigma\rho}\sigma_x\rho_x + u_{\rho\rho}\rho_x^2 + u_{\sigma}\sigma_{xx} + u_{\rho}\rho_{xx} = -4xu_{\rho\rho} + (-x)^{-\frac{1}{2}}u_{\rho}, \\ u_{yy} &= u_{\sigma\sigma}\sigma_y^2 + 2u_{\sigma\rho}\sigma_y\rho_y + u_{\rho\rho}\rho_y^2 + u_{\sigma}\sigma_{yy} + u_{\rho}\rho_{yy} = 4u_{\sigma}. \end{aligned}$$

Підставивши їх у рівняння (1.15) і виразивши x через ρ , одержимо в розглянутій області $x < 0$:

$$u_{\sigma\sigma} - u_{\rho\rho} + \frac{1}{3\rho}u_{\rho} = 0.$$

Тут рівняння Трікомі має гіперболічний тип.

За $D = 0 \Leftrightarrow x = 0$ одержимо $u_{xx} = 0 \Rightarrow u_{\xi\xi} = 0$, тобто рівняння має параболічний тип, але множина $\{(x, y) : x = 0, -\infty < y < +\infty\}$ не являє собою область, тому цей випадок позбавлений фізичного змісту.

Умова $D < 0 \Leftrightarrow x > 0$ визначає праву півплощину декартової системи координат. Розв'язавши лінійне диференціальне рівняння (1.14), знайдемо комплексний перший інтеграл, а отже, і нові змінні:

$$\frac{dy}{dx} = i\sqrt{x} \Rightarrow J = -y + \frac{2i}{3}x^{\frac{3}{2}} \Rightarrow \begin{cases} \xi &= -y, \\ \eta &= 2x^{\frac{3}{2}}/3. \end{cases}$$

Відповідно до знайденої заміни зведемо рівняння (1.15) до канонічного вигляду в цій області:

$$u_{\xi\xi} + u_{\eta\eta} + \frac{1}{3\eta}u_{\eta} = 0.$$

Тут рівняння Трікомі має еліптичний тип.

Рівняння Трікомі набуває широкого застосування в аеродинаміці. А зміна типу рівняння зумовлена, наприклад, переходом від дозвукової швидкості польоту до надзвукової.

Завдання для самостійного виконання

Звести до канонічного вигляду такі рівняння в частинних похідних:

- | | |
|--|---|
| 1.1. $u_{xx} - 2xu_{xy} = 0$ | 1.10. $xu_{xx} + yu_{yy} = 0, x > 0, y > 0$ |
| 1.2. $y^2u_{xx} + x^2u_{yy} = 0$ | 1.11. $u_{xx} + yu_{yy} - u_y/2 = 0, y < 0$ |
| 1.3. $u_{xx} + xu_{yy} = 0, x < 0$ | 1.12. $u_{xx} + xyu_{yy} = 0, x > 0, y > 0$ |
| 1.4. $y^2u_{xx} + x^2u_{yy} = 0$ | 1.13. $xu_{xx} + yu_{yy} = 0, x < 0, y < 0$ |
| 1.5. $y^2u_{xx} - x^2u_{yy} = 0$ | 1.14. $u_{xx} + yu_{yy} + u_y/2 = 0, y > 0$ |
| 1.6. $u_{xx} + yu_{yy} = 0, y < 0$ | 1.15. $4y^2u_{xx} - e^{2x}u_{yy} - 4y^2u_x = 0$ |
| 1.7. $u_{xx} + yu_{yy} = 0, y > 0$ | 1.16. $xy^2u_{xx} - 2x^2yu_{xy} + x^3u_{yy} - y^2u_x = 0$ |
| 1.8. $x^2u_{xx} + 2xyu_{xy} + y^2u_{yy} = 0$ | 1.17. $e^{2x}u_{xx} + 2e^{x+y}u_{xy} + e^{2y}u_{yy} - xu = 0$ |
| 1.9. $u_{xx} + xu_{yy} = 0, x > 0$ | 1.18. $xu_{xx} + 2xu_{xy} + (x-1)u_{yy} = 0, x > 0$ |

Приклад 2. Знайти розв'язок рівняння

$$u_{xx} + 2u_{xy} - 3u_{yy} = 0 \quad (1.16)$$

за виконання двох додаткових умов: $u(x, 0) = 3x^2$, $u_y(x, 0) = 0$.

Розв'язання. У нашому випадку $a = 1$, $b = 1$, $c = -3$ і $D = 4$.

Розв'язавши лінійні диференціальні рівняння (1.12), знайдемо інтеграли, а отже, і нові змінні:

$$\frac{dy}{dx} = 1 + 2 \Rightarrow \xi = y - 3x, \quad \frac{dy}{dx} = 1 - 2 \Rightarrow \eta = y + x.$$

Перетворивши похідні і підставивши їх у рівняння (1.16), одержимо другу канонічну форму для рівняння гіперболічного типу:

$$u_{\xi\eta} = 0. \quad (1.17)$$

Як відомо з курсу диференціальних рівнянь, розв'язок рівняння (1.17) можна зобразити у вигляді

$$u(x, y) = F(\xi) + G(\eta) = F(y - 3x) + G(y + x). \quad (1.18)$$

Підставивши вираз (1.18) у додаткові умови, отримаємо систему:

$$\begin{cases} u(x, 0) = F(-3x) + G(x) = 3x^2, \\ u_y(x, 0) = F'(-3x) + G'(x) = 0. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} F(-3x) + G(x) = 3x^2, \\ -\frac{1}{3}F'(-3x) + G'(x) = 0, \end{cases}$$

розв'язком якої є функції $F(-3x) = \frac{9x^2 + C}{4}$ і $G(x) = \frac{3x^2 - C}{4}$. Відтак запишемо загальний вигляд рівняння (1.18):

$$u(x, y) = \frac{(-3x + y)^2 + C}{4} + \frac{3(x + y)^2 - C}{4} = 3x^2 + y^2.$$

Завдання для самостійного виконання

Знайти розв'язок рівняння за виконання двох додаткових умов:

$$1.19. \begin{cases} x^2 u_{xx} + 2xy u_{xy} + y^2 u_{yy} = 0, \\ u(x, y)|_{y=0} = 1, \quad u_y(x, y)|_{y=0} = 2. \end{cases}$$

$$1.20. \begin{cases} x^2 u_{xx} + 2xy u_{xy} + y^2 u_{yy} = 0, \\ u(x, y)|_{y=0} = 1, \quad u_y(x, y)|_{y=0} = 2. \end{cases}$$

$$\begin{aligned}
1.21. & \begin{cases} 3u_{xx} - 4u_{xy} + u_{yy} - 3u_x + u_y = 0, \\ u(x, y)|_{y=0} = x/2, \quad u_y(x, y)|_{y=0} = -x^2 + 5x - 2. \end{cases} \\
1.22. & \begin{cases} e^y u_{xy} - u_{yy} + u_y = 0, \\ u(x, y)|_{y=0} = -x^2/2, \quad u_y(x, y)|_{y=0} = -\sin x. \end{cases} \\
1.23. & \begin{cases} 4y^2 u_{xx} + 2(1 - y^2) u_{xy} - u_{yy} - \frac{2y}{1 + y^2} (2u_x - u_y) = 0, \\ u(x, y)|_{y=0} = x^2 - 2, \quad u_y(x, y)|_{y=0} = \cos(2x) - 1. \end{cases}
\end{aligned}$$

2. Коротка класифікація основних рівнянь математичної фізики

У цьому розділі наведено характерні фізичні процеси, описувані різними математичними моделями, і диференціальні рівняння в частинних похідних разом із типовими крайовими умовами, притаманними цим моделям.

Важливий клас рівнянь у частинних похідних описують лінійним рівнянням другого порядку:

$$Au \equiv \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^n a_i(x) \frac{\partial u}{\partial x_i} + a(x) u = \Sigma(x), \quad (2.1)$$

де $x = (x_1, \dots, x_n)$. Функції $a_{ij}(x)$, $a_i(x)$, $a(x)$ називають *коефіцієнтами* рівняння (2.1), а функцію $\Sigma(x)$ — *вільним членом*.

2.1. Рівняння коливань

Багато завдань механіки (одновимірні коливання струн і стрижнів, двовимірних мембран) і фізики (електромагнітні коливання) описують рівнянням коливань вигляду

$$\rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \operatorname{div} (p \operatorname{grad} u) - qu + \Sigma(x, t), \quad (2.2)$$

де невідома функція $u(x, t)$ залежить від n ($n = 1, 2, 3$) просторових координат, $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, і часу t ; коефіцієнти ρ , p і q визначають властивостями середовища, де відбувається коливальний процес; вільний член $\Sigma(x, t)$ виражає інтенсивність зовнішнього збурення. У рівнянні (2.2) відповідно до визначення диференціальних операторів div і grad

$$\operatorname{div} (p \operatorname{grad} u) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} \left(p \frac{\partial u}{\partial x_i} \right).$$

У разі *малих поперечних коливань струни*, яка являє собою натягнену нитку, що не чинить опору згину (тобто $|T(x, t)| = T_0 = \text{const}$), рівняння (2.2) набуває вигляду

$$\rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = T_0 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \Sigma, \quad (2.3)$$

де (x, u) є координати площини, у якій струна здійснює поперечні коливання поблизу свого положення рівноваги, що збігається з віссю x .

За $\Sigma \neq 0$ коливання струни називають **змушеними**, а за $\Sigma = 0$ — **вільними**.

Якщо густина ρ стала, то рівняння коливань струни (2.3) набуває вигляду

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f, \quad (2.4)$$

де $f = \frac{\Sigma}{\rho}$, а $a^2 = \frac{T_0}{\rho}$ — стала. Рівняння (2.4) називають також **одновимірним хвильовим рівнянням**.

Рівняння вигляду (2.2) описує також *малі поздовжні коливання пружного стрижня*:

$$\rho S \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left(ES \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \Sigma(x, t), \quad (2.5)$$

де $S(x)$ — площа поперечного перерізу стрижня й $E(x)$ — модуль Юнга в точці x .

Для однозначного опису процесів коливань струни або стрижня необхідно додатково задати величини зсуву U та швидкості U_t у початковий момент часу (*початкові умови*) і режим на кінцях (*крайові умови*).

Приклади крайових умов:

- якщо кінець x_0 струни рухається за законом $\mu(t)$, то $u|_{x=x_0} = \mu(t)$;
- якщо на кінець x_0 струни діє задана сила $\psi(t)$, то $\frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{x=x_0} = \frac{\psi(t)}{T_0}$;
- якщо кінець x_0 стрижня закріплено пружно з коефіцієнтом жорсткості закріплення α , то $E \frac{\partial u}{\partial x} + \alpha u|_{x=x_0} = 0$ відповідно до закону Гука.

Частковим випадком рівняння (2.2) є також *рівняння малих поперечних коливань мембрани*:

$$\rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = T_0 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} \right) + \Sigma. \quad (2.6)$$

Якщо густина ρ стала, то рівняння коливань мембрани

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} \right) + f, \quad a^2 = \frac{T_0}{\rho}, \quad f = \frac{\Sigma}{\rho}, \quad (2.7)$$

називають також **двовимірним хвильовим рівнянням**.

Рівняння вигляду

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_3^2} \right) + f, \quad (2.8)$$

називають **тривимірним хвильовим рівнянням**. Воно описує процеси поширення звуку в однорідному середовищі й електромагнітних хвилях в однорідному непровідному середовищі. Це рівняння задовольняють густина газу, його тиск і потенціал швидкостей, а також складові напруженостей електричного й магнітного полів і відповідні їм потенціали.

Хвильові рівняння (2.4), (2.7), (2.8) можна записати єдиною формулою:

$$\square_a u = f, \quad (2.9)$$

де $\square_a \equiv \frac{\partial^2}{\partial t^2} - a^2 \Delta$ — **хвильовий оператор Даламбера**.

2.2. Процеси розсіювання й дифракції

Нехай у хвильовому рівнянні (2.9) зовнішнє збурення $f(x, t)$ періодичне із частотою ω і амплітудою $a^2 f(x)$:

$$f(x, t) = a^2 f(x) e^{i\omega t}.$$

Якщо шукати періодичні збурення $u(x, t)$ з тією ж частотою й невідомою амплітудою $u(x)$: $u(x, t) = u(x) e^{i\omega t}$, то для функції $u(x)$ одержимо стаціонарне рівняння

$$\Delta u + k^2 u = -f(x), \quad k^2 = \frac{\omega^2}{a^2}, \quad (2.10)$$

що має назву **рівняння Гельмгольца**.

Нехай задано плоску хвилю $e^{i\omega(a, x)}$, що поширюється із нескінченності, $|a| = 1$, $k > 0$, яка підлягає зміні через наявність деякої перешкоди на межі $\partial\omega$ обмеженої області ω . Перешкоду задають, наприклад, за допомогою умови $u|_{\partial\omega} = 0$ або $\frac{\partial u}{\partial n} \Big|_{\partial\omega} = 0$. Ця перешкода зумовлює виникнення розсіяної хвилі $\phi(x)$, яка вдалині від розсіювальних центрів буде близькою до розбіжної

сферичної хвилі

$$\varphi(x) = f\left(\frac{x}{|x|}\right) \frac{e^{ik|x|}}{|x|} + o(|x|^{-1}), \quad (2.11)$$

де функція $f(s) = \frac{x}{|x|}$ — це **амплітуда розсіювання**. Тому за $|x| \rightarrow \infty$ хвиля $\varphi(x)$ має задовольняти умови вигляду

$$\varphi(x) = O(|x|^{-1}), \quad \frac{\partial \varphi(x)}{\partial |x|} - ik\varphi(x) = o(|x|^{-1}), \quad (2.12)$$

що називають **умовами випромінювання Зоммерфельда**. Сумарне ж збурення $u(x)$ поза областю ω включає в себе плоску та розсіяну хвилі:

$$u(x) = e^{ik(a,x)} + \varphi(x). \quad (2.13)$$

2.3. Процеси дифузії й теплопровідності

Процеси поширення тепла й дифузії частинок у середовищі описують таким **загальним рівнянням дифузії**:

$$\rho \frac{\partial u}{\partial t} = \operatorname{div}(p \operatorname{grad} u) - qu + \Sigma(x, t), \quad (2.14)$$

де ρ — коефіцієнт поруватості середовища, а p і q характеризують її властивості.

У разі розгляду процесу поширення тепла $u(x, t)$ є температура середовища в точці $x = (x_1, x_2, x_3)$ у момент часу t . Вважаючи середовище ізотропним, позначимо через $\rho(x)$ його густину, $c(x)$ — питому теплоємність, $k(x)$ — коефіцієнт теплопровідності, а через $\Sigma(x, t)$ — інтенсивність джерел тепла. Процес поширення тепла опишемо функцією, що задовольняє рівняння вигляду

$$c\rho \frac{\partial u}{\partial t} = \operatorname{div}(p \operatorname{grad} u) + \Sigma(x, t). \quad (2.15)$$

Якщо середовище однорідне, тобто ρ , c і k — сталі, то рівняння (2.15) набуде вигляду

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \Delta u + f, \quad a^2 = \frac{k}{c\rho}, \quad f = \frac{\Sigma}{c\rho}. \quad (2.16)$$

Останнє рівняння називають **рівнянням теплопровідності**. Число n просторових змінних у ньому може бути довільним.

Як і у разі рівняння коливань, для повного опису процесу поширення тепла необхідно задати початковий розподіл температури u у середовищі (*початкова умова*) і режим на межі цього середовища (*крайова умова*).

Приклади крайових умов:

- на межі $\partial\omega$ підтримується заданий розподіл температури u_0 : $u|_{\partial\omega} = u_0$;
- на межі $\partial\omega$ підтримується заданий потік тепла u_1 : $-k \frac{\partial u}{\partial n} \Big|_{\partial\omega} = u_1$;
- на межі $\partial\omega$ відбувається теплообмін відповідно до закону Ньютона: $k \frac{\partial u}{\partial n} + h(u - u_0)|_{\partial\omega} = 0$, де h — коефіцієнт теплообміну й u_0 — температура середовища, що оточує ω .

2.4. Рівняння Лапласа й Пуассона

Рівняння Лапласа має вигляд

$$\Delta u = 0, \quad (2.17)$$

де $u = u(x)$, $x \in \mathbb{R}^n$, $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \dots + \frac{\partial^2}{\partial x_n^2}$ — **оператор Лапласа** в $\mathbb{R}^n$.
Відповідне неоднорідне рівняння

$$-\Delta u = \Sigma \quad (2.18)$$

(Σ — відома функція) називають **рівнянням Пуассона**. Рівняння Лапласа й Пуассона фігурують у різноманітних задачах. Наприклад, стаціонарний (не змінний з часом) розподіл температури в однорідному середовищі й стала форма натягнутої мембрани задовольняють рівняння Лапласа, а аналогічний розподіл температури за наявності джерел тепла (із густиною, що не змінюється з часом) і форма мембрани за наявності стаціонарних зовнішніх сил задовольняють рівняння Пуассона. Потенціал електростатичного поля задовольняє рівняння Пуассона з функцією Σ , що пропорційна густині зарядів (в області, де немає зарядів, він задовольняє рівняння Лапласа).

2.5. Рівняння електромагнітних полів

Рівняння Максвелла — система рівнянь для векторів $\mathbf{E} = (E_1, E_2, E_3)$ і $\mathbf{H} = (H_1, H_2, H_3)$, що задають напруженості електричного й магнітного полів у будь-якому середовищі. У гаусовій системі одиниць СГС її представлено як

$$\operatorname{div} \mathbf{D} = 4\pi\rho, \quad \operatorname{rot} \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \quad \operatorname{div} \mathbf{B} = 0, \quad \operatorname{rot} \mathbf{H} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{j} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}, \quad (2.19)$$

де ρ — густина електричних зарядів, c — швидкість світла у вакуумі й у разі полів у будь-яких ізотропних середовищах $\mathbf{D} = \epsilon\mathbf{E}$, $\mathbf{B} = \mu\mathbf{H}$, $\mathbf{j} = \sigma\mathbf{E} +$

+ j_s , де ϵ — діелектрична проникність середовища, μ — магнітна проникність середовища, σ — питома електропровідність, j_s — густина сторонніх струмів, підтримувані будь-якими силами, наприклад магнітним полем або дифузією.

Система Максвелла (2.19) являє собою основу теорії електромагнітних хвиль і слугує базою для всіх радіотехнічних розрахунків. Крайові й початкові умови для неї зазвичай задають із фізичних міркувань.

Із рівнянь Максвелла, зокрема, виводять **телеграфні рівняння**, що описують зміну сили струму й напруги в електричному провіднику:

$$\frac{\partial i}{\partial x} + C \frac{\partial U}{\partial t} + \Sigma U = 0, \quad \frac{\partial U}{\partial x} + L \frac{\partial i}{\partial t} + Ri = 0, \quad (2.20)$$

де x — координата уздовж проводу, i — сила струму, U — напруга в даній точці проводу, R — питомий опір (на одиницю довжини), L — питома самоіндукція, C — питома ємність, Σ — питомий витік.

2.6. Кінетичні рівняння

Для опису процесу поширення частинок замість рівнянь дифузії послуговуються більш точними — так званими **рівняннями переносу**. Одним із прикладів цього класу рівнянь є **одноплщинне рівняння переносу** вигляду

$$\frac{1}{\nu} \frac{\partial \Phi}{\partial t} + (s, \text{grad}) \Phi + \sigma \Phi = \frac{\sigma_s}{4\pi} \int_{S_1} \Phi(x, s', t) ds' + \Sigma, \quad (2.21)$$

де $\Phi = \nu N(x, s, t)$ — потік частинок, що летять з однією й тією ж швидкістю ν у напрямку $s = (s_1, s_2, s_3)$, $|s| = 1$; $N(x, s, t)$ — густина частинок; $\Sigma(x, s, t)$ — густина джерел, коефіцієнти $\sigma(x, t)$, $\sigma_s(x, t)$ характеризують властивості середовища; S_1 — сфера одиничного радіуса в $\mathbb{R}^3$.

Для повного опису процесу переносу частинок необхідно задати початковий розподіл потоку частинок Φ в області $\omega \subset \mathbb{R}^3$ (*початкова умова*) і режим на межі цієї області (*крайова умова*). Наприклад, якщо область ω , де відбувається процес переносу, опукла, то крайова умова виду

$$\Phi(x, s, t) = 0, \quad x \in \partial\omega, \quad (s, n) < 0, \quad (2.22)$$

де $n = n(x)$ — одиничний вектор зовнішньої нормалі до межі області ω , виражає відсутність спадного потоку частинок на область іззовні.

Відзначимо, що рівняння переносу описує процеси переносу нейтронів у ядерному реакторі, переносу променистої енергії, проходження γ -квантів крізь речовину, рухи газів і т.д.

2.7. Рівняння газо- і гідродинаміки

Розглянемо рух ідеальної рідини (газу), тобто рідини, у якій відсутня в'язкість. Нехай $V(x, t) = (v_1, v_2, v_3)$ — вектор швидкості руху рідини, $\rho(x, t)$ — її густина, $p(x, t)$ — тиск, $f(x, t)$ — інтенсивність джерел і $\Sigma(x, t) = (\Sigma_1, \Sigma_2, \Sigma_3)$ — інтенсивність масових сил. Тоді ці величини задовольняють наступну нелінійну систему рівнянь, які називають **рівняннями гідродинаміки (газової динаміки)**:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho V) = f, \quad (2.23-a)$$

$$\frac{\partial V}{\partial t} + (V, \operatorname{grad}) V + \frac{1}{\rho} \operatorname{grad}(p) = \Sigma. \quad (2.23-b)$$

Рівняння (2.23-a) називають **рівнянням неперервності**, а (2.23-b) — **рівнянням руху Ейлера**. Щоб замкнути цю систему рівнянь, необхідно задати зв'язок між тиском і густиною

$$\Phi(p, \rho) = 0, \quad (2.24)$$

який називають **рівнянням стану**. Наприклад, для нестисливої рідини рівняння стану має вигляд $\rho = \text{const}$, а для адіабатичного руху газу —

$$p\rho^{-\chi} = \text{const}, \quad \chi = \frac{c_p}{c_v},$$

де c_p і c_v — питомі теплоємності газу за постійного тиску й постійного об'єму відповідно.

Зокрема, якщо рідина нестислива ($\rho = \text{const}$) і її рух потенційний ($V = -\operatorname{grad} U$), то з рівняння неперервності (2.23-a) випливає, що потенціал U задовольняє рівняння Пуассона.

3. Одновимірне хвильове рівняння як найпростіший вид рівнянь гіперболічного типу. Основні принципи

3.1. Рівняння струни

Струною називають пружну нитку, натягнену й закріплену за два кінці. Натяг струни означає, що на кожну її точку діє дві сили, рівні за величиною (позначимо її як T), але протилежні за напрямком, — їх називають **силами натягу**. Ці сили врівноважують одна одну, і в результаті струна перебуває у спокої. Прикладемо до струни силу величини F у точці x (див. рис. 3.1). Запишемо умову рівноваги (для вертикальних проекцій сил): $-T \sin \alpha - T \sin \beta + F = 0$. Якщо форму струни ліворуч позначити через $y_-(x)$, а праворуч — через $y_+(x)$, то з огляду на те, що $\operatorname{tg} \beta = y'_-$, $\operatorname{tg} \alpha = y'_+$, отримаємо:

$$T \left(\frac{y'_+}{\sqrt{1 + (y'_+)^2}} - \frac{y'_-}{\sqrt{1 + (y'_-)^2}} \right) + F = 0.$$

Тепер розглянемо випадок розподіленого навантаження. Для проміжку $[x, x + \Delta x]$ умова рівноваги сил натягу, прикладених до лівого й правого кінця, а також зовнішня сила F набудуть вигляду:

$$T \left(\frac{y'(x + \Delta x)}{\sqrt{1 + (y'(x + \Delta x))^2}} - \frac{y'(x)}{\sqrt{1 + (y'(x))^2}} \right) + F_{[x, x + \Delta x]} = 0.$$

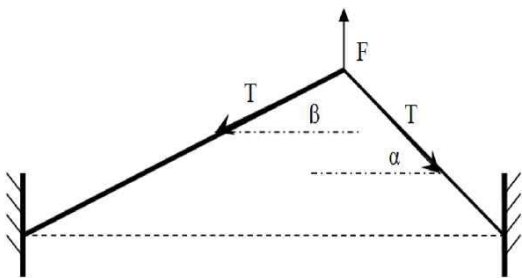


Рис. 3.1. Рівновага струни під дією зовнішньої сили

Розділивши рівняння на Δx і перейшовши до границі за $\Delta x \rightarrow 0$, одержимо

$$T \left(\frac{y'}{\sqrt{1 + y'^2}} \right)' + f(x) = 0,$$

де $f(x)$ — лінійна густина сили. Звичайно, працюючи з реальною струною, деформації вважають малими, відповідно $\sqrt{1 + y'^2}$ заміняють на одиницю і одержують

лінійне рівняння струни:

$$-y'' = f(x), \quad y(0) = y(l) = 0.$$

У разі руху струни сума сил не дорівнює нулю і відповідно до другого закону Ньютона з'являється прискорення. Щоб записати цей закон, замість функції $y(x)$ розглянемо функцію двох змінних $u(t, x)$, тоді сила, що діє на точку x у момент t , дорівнюватиме

$$T \left(\frac{u_x}{\sqrt{1 + u_x^2}} \right)_x + f(t, x),$$

а прискорення — u_{tt} , отже, відповідно до другого закону динаміки ми одержимо рівняння

$$\rho(x) u_{tt} = T \left(\frac{u_x}{\sqrt{1 + u_x^2}} \right)_x + f(t, x), \quad (3.1)$$

що має назву **нелінійного рівняння струни**. Тут $\rho(x)$ — лінійна густина струни. У разі малих коливань рівняння (3.1) лінеаризують, отримуючи

$$\rho(x) u_{tt} = T u_{xx} + f(t, x), \quad (3.2)$$

що називають рівнянням коливань **неоднорідної** струни. Для **однорідної** струни ($\rho(x) \equiv \text{const}$) рівняння зазвичай ділять на ρ , приводячи його до вигляду

$$u_{tt} = a^2 u_{xx} + f(t, x). \quad (3.3)$$

Рівняння (3.3) ми й вивчатимемо далі як рівняння коливань струни. Якщо $f(t, x) = 0$, то коливання називають **вільними**, а в протилежному випадку — **змушеними**.

Теорема 3.1. *Загальний класичний розв'язок рівняння $u_{tt} = a^2 u_{xx}$, яке називають **хвильовим рівнянням**, має вигляд*

$$u = f(x - at) + g(x + at), \quad (3.4)$$

де f і g — довільні двічі диференційовні функції. Цей розв'язок називають **формулою біжної хвилі**.

Функція $u = f(x - at)$ за $t = 0$ збігається з $f(x)$, за $t = 1$ це та ж сама картина, тільки зсунена на a праворуч.

Оскільки динаміку конкретного руху елементів механічної системи визначають початковими умовами (положенням і швидкістю), природно вимагати ці значення й для рівняння струни: $u|_{t=0} = \varphi(x)$, $u_t|_{t=0} = \psi(x)$.

Теорема 3.2. Розв'язок задачі Коші для рівняння $u_{tt} = a^2 u_{xx}$ з початковими умовами

$$u|_{t=0} = \varphi(x), \quad u_t|_{t=0} = \psi(x),$$

де φ — двічі неперервно диференційовна функція, ψ — один раз неперервно диференційовна функція, має вигляд:

$$u(t, x) = \frac{\varphi(x - at) + \varphi(x + at)}{2} + \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} \psi(s) ds, \quad (3.5)$$

який отримав назву **розв'язку Д'Аламбера**.

Отримана формула має гарну геометричну інтерпретацію. У разі виведеної з рівноваги, але непорушної струни $\psi(x) = 0$ за $t > 0$, а її початкова форма $\varphi(x)$ ніби ділиться навпіл: половина рухається праворуч, половина — ліворуч.

Приклад 3. Знайти розв'язок задачі Коші:

$$\begin{cases} u_{tt} = u_{xx}, \\ u(x, 0) = \sin x, \quad u_t(x, 0) = 1. \end{cases}$$

Розв'язання. Скориставшись формулою (3.5), знайдемо розв'язок задачі:

$$u(x, t) = \frac{\sin(x + t) + \sin(x - t)}{2} + \frac{1}{2} \int_{x-t}^{x+t} dz = \sin x \cos t + t.$$

Завдання для самостійного виконання

Знайти розв'язок задачі Коші:

$$3.1. \begin{cases} u_{tt} = u_{xx}, \\ u|_{t=0} = x^2, \quad u_t|_{t=0} = 1 - \sin x. \end{cases}$$

$$3.2. \begin{cases} u_{xx} + 2 \cos x u_{xy} - \sin^2 x u_{yy} - \sin x u_y = 0, \\ u(x, y)|_{y=\sin x} = x + \cos x, \quad u_y(x, y)|_{y=\sin x} = \sin x. \end{cases}$$

$$3.3. \begin{cases} u_{xx} - 2 \sin x u_{xy} - (3 + \cos^2 x) u_{yy} + u_x + (2 - \sin x - \cos x) u_y = 0, \\ u(x, y)|_{y=\cos x} = 0, \quad u_y(x, y)|_{y=\cos x} = e^{-x^2} \cos x. \end{cases}$$

3.2. Принцип Дюамеля

Розглянемо неоднорідне рівняння

$$u_{tt} = a^2 u_{xx} + f(t, x).$$

У динаміці розрізняють два типи впливів: сила, що діє постійно, і удар. За сили, що діє постійно, тіло змінює свою траєкторію руху поступово, натомість у разі удару траєкторія змінюється миттєво. З одного боку, удар можна інтерпретувати як дію постійної сили, дуже великої за величиною, але такої, що діє дуже малий проміжок часу. З іншого боку, постійну силу можна розуміти як послідовність частих слабких ударів.

Якщо удар зроблено за $t = 0$, то формула розв'язку матиме вигляд

$$u(t, x) = \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} \psi(s) ds.$$

Якщо в момент часу $t = \tau$, то

$$u(t, x) = \frac{1}{2a} \int_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)} \psi(s) ds.$$

Принцип Дюамеля полягає в тому, що формулу розв'язку неоднорідного рівняння можна одержати інтегруванням за $[0, t]$ формули для розв'язку однорідного рівняння з початковою швидкістю $\psi_\tau(s)$ за $t = \tau$ із заміною $\psi_\tau(s)$ на $f(\tau, s)$ (тобто послідовності ударів на силу, що діє постійно).

Теорема 3.3. *Розв'язок рівняння $u_{tt} = a^2 u_{xx} + f(t, x)$, що задовольняє нульові початкові умови, визначають формулою*

$$u(t, x) = \frac{1}{2a} \int_0^t \int_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)} f(\tau, s) ds d\tau. \quad (3.6)$$

Розв'язок є класичний, якщо функція f — неперервно диференційовна.

Приклад 4. Знайти розв'язок задачі Коші:

$$\begin{cases} u_{tt} = u_{xx} + \sin t, \\ u(x, 0) = 0, \quad u_t(x, 0) = 0. \end{cases}$$

Розв'язання. Скориставшись формулою (3.6), знайдемо розв'язок задачі:

$$u(x, t) = \frac{1}{2} \int_0^t d\tau \int_{x-(t-\tau)}^{x+(t-\tau)} \sin \tau dz = \frac{1}{2} \int_0^t 2(t - \tau) \sin \tau d\tau = t - \sin t.$$

Приклад 5. Знайти розв'язок задачі Коші:

$$\begin{cases} u_{tt} = u_{xx} + xt^2, \\ u(x, 0) = 0, \quad u_t(x, 0) = x + 1. \end{cases}$$

Розв'язання. Розв'язок задачі шукатимемо у вигляді $u(x, t) = P(x, t) + Q(x, t)$. Тоді вихідна задача розпадеться на дві.

Задачу Коші для функції $P(x, t)$

$$\begin{cases} P_{tt} = P_{xx}, \\ P(x, 0) = 0, \quad P_t(x, 0) = x + 1 \end{cases}$$

за допомогою формули (3.5) знайдемо у вигляді

$$P(x, t) = \frac{1}{2} \int_{x-t}^{x+t} (z + 1) dz = t(x + 1).$$

Задачу Коші для функції $Q(x, t)$

$$\begin{cases} Q_{tt} = Q_{xx} + xt^2, \\ Q(x, 0) = 0, \quad Q_t(x, 0) = 0 \end{cases}$$

за допомогою формули (3.6) знайдемо у вигляді

$$Q(x, t) = \frac{1}{2} \int_0^t d\tau \int_{x-(t-\tau)}^{x+(t-\tau)} z\tau^2 dz = \frac{xt^4}{12}.$$

Розв'язок вихідної задачі є $u(x, t) = t(x + 1) + \frac{xt^4}{12}$.

Завдання для самостійного виконання

Знайти розв'язок задачі Коші:

$$3.4. \begin{cases} u_{tt} = u_{xx} + 6, \\ u|_{t=0} = x^2, \quad u_t|_{t=0} = 4x. \end{cases}$$

$$3.5. \begin{cases} u_{tt} = 4u_{xx} + xt, \\ u|_{t=0} = x^2, \quad u_t|_{t=0} = x. \end{cases}$$

$$3.6. \begin{cases} u_{tt} = u_{xx} + 2, \\ u|_{t=0} = \sin x, \quad u_t|_{t=0} = \cos x. \end{cases}$$

$$3.7. \begin{cases} u_{tt} = u_{xx} + \sin x, \\ u|_{t=0} = \sin x, \quad u_t|_{t=0} = 0. \end{cases}$$

$$3.8. \begin{cases} u_{tt} = a^2 u_{xx} + \sin(\omega x), \\ u|_{t=0} = 0, \quad u_t|_{t=0} = 0. \end{cases}$$

$$3.9. \begin{cases} u_{tt} = u_{xx} + 2(t^2 - x^2), \\ u|_{t=0} = 0, \quad u_t|_{t=0} = 0. \end{cases}$$

$$3.10. \begin{cases} u_{tt} = u_{xx} + e^x, \\ u|_{t=0} = \sin x, \quad u_t|_{t=0} = x + \cos x. \end{cases}$$

$$3.11. \begin{cases} u_{tt} = a^2 u_{xx} + \sin(\omega t), \\ u|_{t=0} = 0, \quad u_t|_{t=0} = 0. \end{cases}$$

3.3. Рівняння, що описують відбиті хвилі

Розглянемо однорідний випадок рівняння (3.3). Для фізичної струни області змін змінних $t \in \mathbb{R}$, $x \in \mathbb{R}$ не цілком прийнятні, тому що вона завжди скінченна і займає не всю пряму, а тільки відрізок довжини l ($x \in [0, l]$). На кінцях відрізка ми маємо умови закріплення $u(t, 0) = u(t, l) = 0$. Для того щоб зрозуміти, як ці умови впливають на розв'язок, розглянемо проміжну ситуацію, коли рівняння задано на півосі $x \in [0, \infty)$, а за $x = 0$ задано умову $u(t, 0) = 0$:

$$\begin{cases} u_{tt} = a^2 u_{xx}, \\ u|_{t=0} = \varphi(x), \quad u_t|_{t=0} = \psi(x), \quad u|_{x=0} = 0. \end{cases}$$

Загальний розв'язок рівняння представимо у вигляді (3.4). І підстановка його в початкові умови дає систему рівнянь

$$\begin{cases} f(x) + g(x) = \varphi(x), \\ -af'(x) + ag'(x) = \psi(x), \end{cases}$$

з якої випливають формули для функцій $f(x)$ і $g(x)$:

$$f(x) = \frac{\varphi(x)}{2} - \frac{1}{2a} \int_0^x \psi(s) ds, \quad g(x) = \frac{\varphi(x)}{2} + \frac{1}{2a} \int_0^x \psi(s) ds, \quad x \geq 0. \quad (3.7)$$

Аналізуючи формулу (3.7), ми можемо помітити, що для виразу $f(x - at)$ аргумент може за $t > 0$ набувати як позитивних, так і негативних значень, а для $g(x + at)$ це може бути тільки у разі $t < 0$. Отже, функції $f(s)$ і $g(s)$ необхідно визначити за всіх значень аргументу. Підставивши у крайові умови шукані функції, отримаємо рівність $f(-at) + g(at) = 0$, а в разі заміни $s = at$ одержимо $f(-s) + g(s) = 0$, тобто $g(s)$ за негативних значень s виражають через значення f за позитивних значень аргументу. У результаті одержимо

$$f(x) = -\frac{\varphi(-x)}{2} - \frac{1}{2a} \int_0^x -\psi(-s) ds, \quad g(x) = -\frac{\varphi(-x)}{2} + \frac{1}{2a} \int_0^x -\psi(-s) ds.$$

Теорема 3.4. *Розв'язок задачі Коші*

$$\begin{cases} u_{tt} = a^2 u_{xx}, & x > 0 \\ u|_{t=0} = \varphi(x), \quad u_t|_{t=0} = \psi(x), \quad u|_{x=0} = 0, \end{cases}$$

заданий формулою Д'Аламбера, у якій початкові умови продовжено на негативну піввісь непарним способом:

$$u(t, x) = \frac{\tilde{\varphi}(x - at) + \tilde{\varphi}(x + at)}{2} + \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} \tilde{\psi}(s) ds, \quad (3.8)$$

де

$$\tilde{\varphi}(x) = \begin{cases} \varphi(x), & x \geq 0, \\ -\varphi(-x), & x \leq 0, \end{cases} \quad \tilde{\psi}(x) = \begin{cases} \psi(x), & x \geq 0, \\ -\psi(-x), & x \leq 0. \end{cases}$$

Розв'язок класичний, якщо функція φ — двічі, а ψ — один раз неперервно диференційовна і виконано умови $\varphi(0) = \varphi''(0) = \psi'(0) = 0$.

3.4. Коливання струни з вільним кінцем

Закріпити струну можна як жорстко, так і м'яко, вільно. Фізично це виглядає так: струну прив'язують до кільця, яке надівають на спицю в такий спосіб, що кінець струни може ковзати спицею вгору-вниз. Рівняння рівноваги у разі вільного закріплення набуде вигляду

$$Tu_{xx} + F = 0.$$

За відсутності зовнішньої сили ми одержуємо умову, що зазвичай називають *умовою вільного кінця*: $u_x|_{x=0} = 0$. Це виражають формулою

$$u(t, x) = \begin{cases} \frac{\varphi(x - at) + \varphi(x + at)}{2} + \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} \psi(s) ds, & x > at, \\ \frac{\varphi(x + at) + \varphi(at - x)}{2} + \frac{1}{2a} \int_{x-at}^0 \psi(-s) ds + \frac{1}{2a} \int_0^{at+x} \psi(s) ds, & x < at. \end{cases}$$

Умова продовження початкових умов на $x < 0$ дозволяє пояснити явище, добре відоме у фізиці: *відбиття хвиль від закріпленого або вільного кінця*. Воно полягає в тому, що хвиля, яка рухається до кінця струни, через якийсь час досягає його й повертається назад, але тільки «догори ногами» і «задом наперед». Принцип продовження початкових умов дозволяє побачити це явище як ефект обміну хвилями (див. рис. 3.2). Розглядаючи рівняння

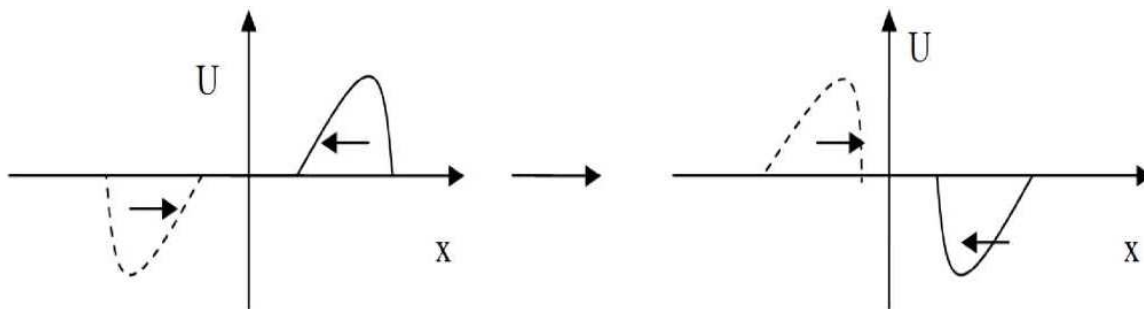


Рис. 3.2. Обмін хвилями для реальної ($x > 0$) і уявної ($x < 0$) області

на відрізку $[0, l]$, можна послуговуватися формулою Д'Аламбера. На відрізок $[-l, 0]$ треба продовжити початкові умови непарним способом. Таке продовження, непарне не тільки відносно $x = 0$, але й відносно $x = l$ (що формально записують формулою $\varphi(2l - x) = -\varphi(x)$), виявляється $2l$ -періодичним.

3.5. Умови узгодження

Теорема 3.5. *Розв'язок змішаної задачі Коші*

$$\begin{aligned} u_{tt} &= a^2 u_{xx}, \quad t \in \mathbb{R}, \quad x \in [0, l], \\ u|_{t=0} &= \varphi(x) \in C^2((0, l)), \quad u|_{x=0} = v(t) \in C^2([0, \infty)), \\ u_t|_{t=0} &= \psi(x) \in C^1((0, l)), \quad u|_{x=l} = \mu(t) \in C^2([0, \infty)), \end{aligned}$$

що задають формулою Д'Аламбера (3.5), є класичний, якщо виконано умови узгодження:

$$\begin{cases} v(0) = \varphi(0), \\ v'(0) = \psi(0), \\ v''(0) = a^2 \varphi''(0), \end{cases} \quad \begin{cases} \mu(0) = \varphi(l), \\ \mu'(0) = \psi(l), \\ \mu''(0) = a^2 \varphi''(l). \end{cases} \quad (3.9)$$

Приклад 6. Розглянемо таке завдання:

$$\begin{cases} u_{tt} = a^2 u_{xx}, & x \geq 0, \\ u|_{t=0} = 0, \quad u_t|_{t=0} = 1, \quad u|_{x=0} = 0. \end{cases}$$

Розв'язання. Для функцій $\varphi(x)$ і $\psi(x)$ не виконується одна з необхідних умов, а саме $\mathbf{v}'(0) = \psi(0)$. Незважаючи на те що умови узгодження (3.9) не виконано, ми можемо формально розглянути функцію, визначувану формулою Д'Аламбера (3.8), що дає змогу отримати розв'язок

$$u(t, x) = \begin{cases} \frac{1}{2a}(x + at - x + at) = t, & x > at, \\ \frac{1}{2a} \int_{x-at}^0 (-a) ds + \frac{1}{2a} \int_0^{x+at} (-1) ds = \frac{x}{a}, & -at < x < at, \\ \frac{1}{2a}(x - at - x - at) = -t, & x < -at. \end{cases} \quad (3.10)$$

Функцію (3.10), незважаючи на її негладкість (див. рис. 3.3), необхідно розглядати як розв'язок, оскільки вона виникає в цілому ряді класичних завдань (наприклад, у геофізиці). Із математичного погляду розв'язок (3.10) вважають *узагальненням*.

3.6. Метод Фур'є для одновимірного хвильового рівняння

Звукові коливання, які ми спостерігаємо практично неозброєним оком, описують із достатнім ступенем точності рівнянням

Виникає питання, які розв'язки відповідають таким коливанням. Природно припустити, що у разі цих коливань форма струни зберігається, описуючись функцією $y(x)$. Коливання полягають у тому, що цю форму в різні моменти часу спостерігають «із різним коефіцієнтом» — функцією $h(t)$. Отже, розглядувані коливання логічно вважати функціями вигляду

$$u(t, x) = h(t) y(x).$$

Підставивши цю функцію в рівняння (3.12), одержимо

$$\ddot{h}(t) y(x) = a^2 h(t) y''(x)$$

і після ділення на $a^2 h(t)$ і $y(x)$:

$$\frac{\ddot{h}(t)}{a^2 h(t)} = \frac{y''(x)}{y(x)} = \lambda. \quad (3.11)$$

Співвідношення (3.11) має суттєву особливість: функція, розташована ліворуч, залежить тільки від t , а функція, розташована праворуч, — тільки

від x . У цьому разі наше співвідношення можна перетворити на пару звичайних диференціальних рівнянь:

$$\begin{aligned} y''(x) &= \lambda y(x), \quad \ddot{h}(t) = a^2 \lambda h(t). \\ u_{tt} &= a^2 u_{xx}. \end{aligned} \quad (3.12)$$

Перше рівняння можна доповнити додатковими умовами, адже струна закріплена, тобто $u(t, 0) = u(t, l) = 0$. Підставивши у ці співвідношення наш розв'язок, одержимо

$$y(0)h(t) = y(l)h(t) = 0.$$

Далі можливі два варіанти: або $h(t) \equiv 0$, і тоді $u(t, x) \equiv 0$ (але цей випадок нас не цікавить, оскільки описує структуру, що перебуває у спокої), або $h(t) \neq 0$, і тоді $y(0) = y(l) = 0$. Ця пара

$$y''(x) = \lambda y(x), \quad y(0) = y(l) = 0 \quad (3.13)$$

утворює **спектральну задачу**, що визначає ті λ , за яких рівняння має нетривіальний розв'язок, що задовольняє крайові умови. Існує два способи розв'язання.

1. Розглянути варіанти:

- $\lambda > 0$ ($\lambda = \omega^2$), що не дає жодних розв'язків, окрім тривіальних;
- $\lambda < 0$ ($\lambda = -\omega^2$), що за $\lambda_n = -\left(\frac{\pi n}{l}\right)^2$ дає власні функції $y_n(x) = C \sin \frac{\pi n x}{l}$;
- $\lambda = 0$, що теж не дає нетривіальних розв'язків.

2. Замість розгляду різних можливостей щодо знака λ завжди вважати, що $\lambda = \omega^2$, де ω може бути комплексним.

У цьому разі загальний розв'язок рівняння має вигляд

$$y = C_1 e^{\omega x} + C_2 e^{-\omega x}.$$

Підставивши його у першу умову, одержимо $y(0) = C_1 = -C_2$, підставивши у другу — $y(l) = C_1 (e^{\omega l} - e^{-\omega l}) = 0$. Відтак виникає альтернатива: або

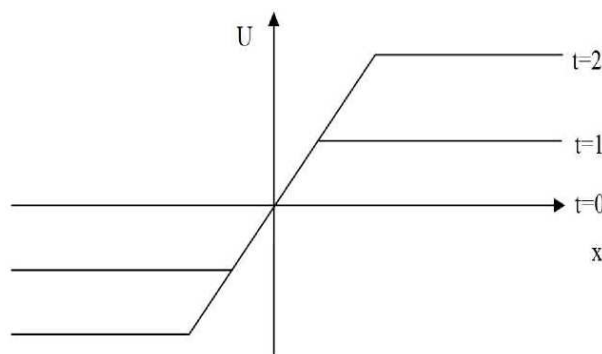


Рис. 3.3. Графік кусково-гладкої функції (3.10) за різних t

$C_1 = 0$ (і тоді розв'язок тривіальний), або $e^{\omega l} = -e^{-\omega l}$, тобто $e^{2\omega l} = 1$. Розв'язок останнього рівняння добре відомий із теорії функцій комплексної змінної — це набір чисел $2\omega l = 2\pi ni$. Повернувшись до нашої задачі, одержимо

$$\omega = \frac{\pi ni}{l}, \quad \lambda = \lambda_n = -\frac{\pi^2 n^2}{l^2},$$

тобто те саме, що і в «дійсних» міркуваннях.

$$y = C \left(e^{\frac{\pi ni x}{l}} - e^{-\frac{\pi ni x}{l}} \right) = \tilde{C} \sin \frac{\pi n x}{l}.$$

Отже, наша спектральна задача має такий розв'язок: власні значення $\lambda_n = -\frac{\pi^2 n^2}{l^2}$, власні функції мають вигляд $y_n(x) = \sin \frac{\pi n x}{l}$. Підставивши знайдені λ_n у рівняння $\ddot{h} = a^2 \lambda h$, одержимо, що

$$h_n(t) = A_n \cos \frac{\pi n a t}{l} + B_n \sin \frac{\pi n a t}{l},$$

отже, розв'язок рівняння струни вигляду, що цікавить нас, можна описати формулою

$$u_n(t, x) = \sin \frac{\pi n x}{l} \left(A_n \cos \frac{\pi n a t}{l} + B_n \sin \frac{\pi n a t}{l} \right).$$

Оскільки сума розв'язків також являє собою розв'язок, ми одержимо таку сім'ю розв'язків хвильового рівняння:

$$u(t, x) = \sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{\pi n x}{l} \left(A_n \cos \frac{\pi n a t}{l} + B_n \sin \frac{\pi n a t}{l} \right). \quad (3.14)$$

Характерною особливістю цієї формули є її нескінченність.

Для того щоб співвіднести цю формулу з розв'язками, розглянутими раніше, підставимо її в початкові умови. Підставивши в (3.14) $t = 0$, одержимо

$$\varphi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin \frac{\pi n x}{l}.$$

Продиференціювавши (3.14) за t , одержимо

$$\psi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \frac{\pi n a}{l} \sin \frac{\pi n x}{l}.$$

Відтак ми отримаємо задачу: розкласти функцію за синусами. Слід зауважити, що ця задача нетривіальна: її розв'язок у вигляді ряду (3.14) був отриманий ще наприкінці XVIII століття і Бернуллі, і Ейлером, і Д'Аламбером. Ця проблема навіть перебувала у центрі досить серйозної наукової дискусії між Ейлером і Д'Аламбером про сутність функції. Ейлер уважав, що це крива, намальована довільним рухом руки, Д'Аламбер — що це довільна формула, аналітичний вираз. Тому загальним розв'язком «з позиції Ейлера» є формула розповсюджувальних хвиль, а з позиції Д'Аламбера — у тому числі і ряд (3.14). Однак французький математик Фур'є довів, що функція і ряд — одне і те саме. Для цього треба було зрозуміти, як побудувати ряд за функцією. Математик знайшов формули для цих коефіцієнтів, саме тому метод розділення змінних називають **методом Фур'є**.

Отже, розглянемо задачу про коливання струни:

$$\begin{cases} u_{tt} = u_{xx}, \\ u(t, 0) = u(t, l) = 0, \quad u(0, x) = \varphi(x), \quad u_t(0, x) = \psi(x) \end{cases}$$

і, скориставшись методом розділення змінних, одержимо зображення розв'язку у вигляді ряду (3.14), де

$$A_n = \frac{2}{l} \int_0^l \varphi(x) \sin \frac{\pi n x}{l} dx, \quad B_n = \frac{2}{l} \int_0^l \psi(x) \sin \frac{\pi n x}{l} dx.$$

Коефіцієнти A_n, B_n знайдемо, підставивши розв'язок у початкові умови і скориставшись тим, що інтеграл від добутку різних синусів за відрізком $[0, l]$ дорівнює нулю:

$$\varphi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin \frac{\pi n x}{l}, \quad \psi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \frac{\pi n a}{l} \sin \frac{\pi n x}{l}.$$

Приклад 7. Розв'язати змішану задачу для хвильового рівняння на відрізку:

$$\begin{cases} u_{tt} = u_{xx}, & 0 \leq x \leq 1, \quad 0 < t < \infty; \\ u(x, 0) = x(x-1), \quad u_t(x, 0) = 0, \quad u(0, t) = u(1, t) = 0. \end{cases}$$

Розв'язання. Шукатимемо розв'язок у вигляді

$$u(x, t) = X(x) T(t). \quad (3.15)$$

Підставивши (3.15) у вихідне рівняння і розділивши змінні, одержимо

$$\begin{cases} X''(x) + \lambda X(x) = 0, & X(0) = X(1) = 0, \\ \ddot{T}(t) + \lambda T(t) = 0. \end{cases} \quad (3.16)$$

Загальним розв'язком для координатної функції є вираз

$$X(x) = C_1 \cos \sqrt{\lambda}x + C_2 \sin \sqrt{\lambda}x.$$

Підставивши крайові умови, одержимо

$$X(0) = C_1 = 0; \quad X(1) = \sin \sqrt{\lambda} = 0 \Rightarrow \lambda_k = \pi^2 k^2.$$

Отже,

$$X_k(x) = \sin(\pi kx), \quad k = 1, 2, \dots \quad (3.17)$$

Аналогічно для часової функції:

$$T_k(t) = A_k \cos(\pi kt) + B_k \sin(\pi kt). \quad (3.18)$$

Скомбінувавши (3.17) і (3.18), отримаємо

$$u(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} (A_k \cos(\pi kt) + B_k \sin(\pi kt)) \sin(\pi kx).$$

Скористаємося початковими умовами:

$$\begin{aligned} u_t(x, 0) &= \sum_{k=1}^{\infty} \pi k B_k \sin(\pi kx) = 0 \Rightarrow B_k \equiv 0; \\ u(x, 0) &= \sum_{k=1}^{\infty} A_k \sin(\pi kx) = x(x-1). \end{aligned}$$

Коефіцієнти A_k з останньої умови обчислимо як

$$\begin{aligned} A_k &= 2 \int_0^1 x(x-1) \sin(\pi kx) dx = \frac{4(\cos k\pi - 1)}{k^3 \pi^3}; \\ A_m &= -\frac{8}{(2m+1)^3 \pi^3}. \end{aligned}$$

Остаточний розв'язок задачі:

$$u(x, t) = -\frac{8}{\pi^3} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\cos[\pi(2m+1)t]}{(2m+1)^3} \sin[\pi(2m+1)x].$$

Завдання для самостійного виконання

Знайти розв'язок змішаних задач для хвильового рівняння на відрізок:

$$\begin{aligned}
 3.12. \quad & \begin{cases} u_{tt} = a^2 u_{xx}, & 0 < x < l, & t > 0 \\ u(x, 0) = \sin \frac{5\pi}{2l} x, & u_t(x, 0) = \cos \frac{\pi}{2l} x, & u(0, t) = u_x(l, t) = 0. \end{cases} \\
 3.13. \quad & \begin{cases} u_{tt} = a^2 u_{xx}, & 0 < x < l, & t > 0 \\ u(x, 0) = \cos \frac{\pi}{2l} x, & u_t(x, 0) = \cos \frac{3\pi}{2l} x + \cos \frac{5\pi}{2l} x, & u_x(0, t) = u(l, t) = 0. \end{cases} \\
 3.14. \quad & \begin{cases} u_{tt} = 49u_{xx}, \\ u(x, 0) = 3 \sin 2\pi x, & u_t(x, 0) = 21\pi \sin 3\pi x, & u(0, t) = u(4, t) = 0. \end{cases} \\
 3.15. \quad & \begin{cases} u_{tt} = 4u_{xx}, \\ u(x, 0) = 0, & u_t(x, 0) = 18\pi \sin 9\pi x, & u(0, t) = u_x(3/2, t) = 0. \end{cases} \\
 3.16. \quad & \begin{cases} u_{tt} = 9u_{xx}, \\ u(x, 0) = x(x - 1/2), & u_t(x, 0) = 0, & u(0, t) = u(1/2, t) = 0. \end{cases}
 \end{aligned}$$

3.7. Неоднорідне рівняння гіперболічного типу

У завданні про коливання струни під дією розподіленої сили ми одержали неоднорідне рівняння (3.3).

Випадок стаціонарної неоднорідності. Спочатку розглянемо простий частинний випадок, коли зовнішня сила не залежить від часу. Шукатимемо розв'язок задачі:

$$\begin{cases} u_{tt} = a^2 u_{xx} + f(x), & 0 \leq x \leq l, \\ u(x, 0) = \varphi(x), & u_t(x, 0) = \psi(x), & u(0, t) = u(l, t) = 0. \end{cases} \quad (3.19)$$

Через неоднорідність рівняння (3.19) розділити в ньому змінні не вдається. Шукатимемо розв'язок у вигляді суми двох функцій:

$$u(x, t) = V(x, t) + \omega(x), \quad (3.20)$$

кожна з яких підпорядкована нульовій крайовій умові. Функцію $\omega(x)$ називають *стаціонарною частиною* розв'язку. Вимагатимемо, щоб функція $V(x, t)$ задовольняла однорідне рівняння з початковими умовами з (3.19) і (3.20):

$$\begin{cases} V_{tt} = a^2 V_{xx}, & 0 \leq x \leq l, \\ V(x, 0) = \varphi(x) - \omega(x), & V_t(x, 0) = \psi(x). \end{cases} \quad (3.21)$$

Отже, для функції $V(x, t)$ ми одержали задачу, яку можна розв'язати методом розділення змінних.

Для функції $\omega(x)$ одержимо рівняння

$$a^2 \omega_{xx} + f(x) = 0, \quad (3.22)$$

розв'язуване двократним інтегруванням з урахуванням двох крайових умов $\omega(0) = \omega(l) = 0$. Підставивши знайдену функцію $\omega(x)$ у початкову умову (3.21), зможемо знайти функцію $V(x, t)$.

Загальний випадок неоднорідного рівняння. У разі якщо розподілена сила змінюється з часом, ми вимушені розв'язувати таку задачу:

$$\begin{cases} u_{tt} = a^2 u_{xx} + f(x, t), & 0 \leq x \leq l, \\ u(x, 0) = \varphi(x), & u_t(x, 0) = \psi(x), & u(0, t) = u(l, t) = 0. \end{cases} \quad (3.23)$$

Шукатимемо розв'язок у вигляді розвинення за власними функціями однорідної задачі:

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(t) \sin \frac{\pi n x}{l}. \quad (3.24)$$

Зобразимо функцію $f(x, t)$ і функції початкових умов у вигляді таких самих рядів Фур'є:

$$\begin{aligned} f(x, t) &= \sum_{n=1}^{\infty} f_n(t) \sin \frac{\pi n x}{l}, & f_n(t) &= \frac{2}{l} \int_0^l f(\xi, t) \sin \frac{\pi n \xi}{l} d\xi; \\ \varphi(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n \sin \frac{\pi n x}{l}, & \varphi_n &= \frac{2}{l} \int_0^l \varphi(\xi) \sin \frac{\pi n \xi}{l} d\xi; \\ \psi(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} \psi_n \sin \frac{\pi n x}{l}, & \psi_n &= \frac{2}{l} \int_0^l \psi(\xi) \sin \frac{\pi n \xi}{l} d\xi. \end{aligned} \quad (3.25)$$

Підставивши (3.24) і Фур'є-розвинення функції $f(x, t)$ (3.25) в основне рівняння (3.23), отримаємо рівняння вигляду

$$\sum_{n=1}^{\infty} [u_n''(t) + \omega_n^2 u_n(t) - f_n(t)] \sin \frac{\pi n x}{l} = 0, \quad (3.26)$$

де $\omega_n = \frac{\pi n a}{l}$. З огляду на ортогональність синусів кожний із коефіцієнтів ряду (3.26) дорівнює нулю, тобто для кожної з функцій $u_n(t)$ одержимо звичайне диференціальне рівняння:

$$u_n''(t) + \omega_n^2 u_n(t) = f_n(t). \quad (3.27)$$

Підставивши (3.24) у початкові умови з урахуванням (3.25), отримаємо умови для функцій $u_n(t)$: $u_n(0) = \phi_n$, $u_n'(0) = \psi_n$, які повністю визначають розв'язок рівняння (3.27).

Випадок неоднорідних крайових умов. Знайдемо розв'язок змішаної задачі з неоднорідними крайовими умовами:

$$\begin{cases} u_{tt} = a^2 u_{xx} + f(x, t), & 0 \leq x \leq l, t \geq 0; \\ u(x, 0) = \phi(x), & u_t(x, 0) = \psi(x), \\ u(0, t) = \lambda(t), & u(l, t) = \mu(t). \end{cases} \quad (3.28)$$

Уведемо замість $u(x, t)$ нову невідому функцію $V(x, t)$, зумовлену співвідношенням

$$u(x, t) = V(x, t) + \omega(x, t), \quad (3.29)$$

де $\omega(x, t)$ — функція, яку вважатимемо відомою — пізніше ми оберемо її самі. Рівняння для функції $V(x, t)$ набуде вигляду

$$V_{tt} = a^2 V_{xx} + \tilde{f}(x, t), \quad \tilde{f}(x, t) = f(x, t) - \omega_{tt} + a^2 \omega_{xx}. \quad (3.30)$$

Початкові та крайові умови для функції $V(x, t)$ запишемо у вигляді

$$\begin{aligned} V(x, 0) = \tilde{\phi}(x) &= \phi(x) - \omega(x, 0), & V(0, t) = \tilde{\lambda}(t) &= \lambda(t) - \omega(0, t), \\ V_t(x, 0) = \tilde{\psi}(x) &= \psi(x) - \omega_t(x, 0), & V(l, t) = \tilde{\mu}(t) &= \mu(t) - \omega(l, t). \end{aligned}$$

Відтак оберемо функцію $\omega(x, t)$ так, щоб крайові умови для функції $V(x, t)$ були однорідними: $\tilde{\lambda}(t) = 0$, $\tilde{\mu}(t) = 0$. Тобто матимемо такі умови для вибору функції $\omega(x, t)$:

$$\omega(0, t) = \lambda(t), \quad \omega(l, t) = \mu(t).$$

Для цього досить взяти найпростіший випадок із лінійною залежністю від x :

$$\omega(x, t) = \lambda(t) + \frac{x}{l} (\mu(t) - \lambda(t)). \quad (3.31)$$

Отже, для функції $V(x, t)$ матимемо неоднорідне рівняння (3.30) з однорідними крайовими умовами.

Приклад 8. Знайти розв'язок змішаної задачі для хвильового рівняння на відріжку

$$\begin{cases} u_{tt} = 9u_{xx}, & 0 < x < 2, \quad t > 0; \\ u(0, t) = -8, \quad u(2, t) = 2, & u(x, 0) = \sin 6\pi x + 5x - 8, \quad u_t(x, 0) = 0. \end{cases}$$

Розв'язання. Уведемо нову функцію $w(x, t) = u(x, t) + \gamma_1 x + \gamma_2$. Підберемо коефіцієнти γ_1 і γ_2 так, щоб рівняння $w_t = 9w_{xx}$ мало нульові крайові умови:

$$\begin{cases} w(0, t) = u(0, t) + \gamma_1 \cdot 0 + \gamma_2 = 0 \\ w(2, t) = u(2, t) + \gamma_1 \cdot 2 + \gamma_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \gamma_1 = -5, \\ \gamma_2 = 8, \end{cases} \Rightarrow w(x, t) = u(x, t) - 5x + 8.$$

Розв'язок однорідної змішаної задачі для функції $w(x, t)$ з нульовими крайовими умовами шукатимемо аналогічно прикладу 7:

$$\begin{cases} w_{tt} = 9w_{xx} \\ w(x, 0) = \sin 6\pi x, \quad w_t(x, 0) = 0 \\ w(0, t) = 0, \quad w(2, t) = 0; \end{cases} \Rightarrow w(x, t) = \cos 18\pi t \sin 6\pi x.$$

Остаточний розв'язок набуде вигляду

$$u(x, t) = \cos 18\pi t \sin 6\pi x + 5x - 8.$$

Приклад 9. Знайти розв'язок неоднорідної змішаної задачі для хвильового рівняння на відріжку

$$\begin{cases} u_{tt} = u_{xx} + 65e^{-8t} \sin x, & 0 < x < \pi, \quad t > 0; \\ u(0, t) = u(\pi, t) = 0, & u(x, 0) = u_t(x, 0) = 0. \end{cases}$$

Розв'язання. Шукатимемо розв'язок рівняння у вигляді ряду Фур'є за власними функціями відповідної однорідної задачі:

$$\begin{cases} u_{tt} = u_{xx}, & 0 < x < \pi, \quad t > 0; \\ u(0, t) = u(\pi, t) = 0, & u(x, 0) = u_t(x, 0) = 0, \end{cases}$$

тобто за функціями $\sin kx$: $u(x, t) = \sum_k u_k(t) \sin(kx)$, вважаючи при цьому t параметром. Отже, для розвинення вихідного рівняння матимемо співвідношення

$$\sum_k \left(\frac{d^2 u_k(t)}{dt^2} + k^2 u_k(t) \right) \sin(kx) = \sum_k f_k(t) \sin(kx).$$

За відповідним розвиненням для функції

$$f(x, t) = \sum_k f_k(t) \sin(kx) = 65e^{-8t} \sin x$$

всі $f_k(t) = 0$, окрім $f_1(t) = 65e^{-8t}$. Звідси випливає, що знайти нетривіальний розв'язок задачі Коші ми можемо тільки для першої гармоніки

$$\frac{d^2 u_1(t)}{dt^2} + u_1(t) = 65e^{-8t}.$$

Розв'язок цього диференціального рівняння в загальному вигляді такий:

$$u_1(t) = A \cos t + B \sin t + e^{-8t},$$

а з урахуванням початкових умов: $u_1(t) = e^{-8t} + 8 \sin t - \cos t$.

Розв'язок задачі набуде вигляду

$$u(x, t) = (e^{-8t} + 8 \sin t - \cos t) \sin x.$$

Завдання для самостійного виконання

Знайти розв'язки змішаних задач:

$$3.17. \begin{cases} u_{tt} = u_{xx} + A \sin t, & 0 < x < l, \quad t > 0, \\ u(x, 0) = 0, \quad u_t(x, 0) = 0, & u(0, t) = u_x(l, t) = 0. \end{cases}$$

$$3.18. \begin{cases} u_{tt} = u_{xx} + Ae^{-t} \cos \frac{\pi}{2l} x, & 0 < x < l, \quad t > 0, \\ u(x, 0) = 0, \quad u_t(x, 0) = 0, & u_x(0, t) = u(l, t) = 0. \end{cases}$$

$$3.19. \begin{cases} u_{tt} = 9u_{xx}, & 0 < x < 3, \quad t > 0, \\ u(x, 0) = 3 \sin 3\pi x - 6 + 4x, & u_t(x, 0) = 0, \quad u(0, t) = -6, \quad u(3, t) = 6. \end{cases}$$

$$3.20. \begin{cases} u_{tt} = 9u_{xx}, & 0 < x < 1, \quad t > 0, \\ u(x, 0) = 7 - 5x, & u_t(x, 0) = 12 \sin 4\pi x, \quad u(0, t) = 7, \quad u(1, t) = 2. \end{cases}$$

$$3.21. \begin{cases} u_{tt} = a^2 u_{xx} + \sin 2t, & 0 < x < l, \quad t > 0, \\ u(x, 0) = 0, \quad u_t(x, 0) = -2 \cos \frac{2x}{a}, & u_x(0, t) = 0, \quad u_x(l, t) = \frac{2}{a} \sin \frac{2l}{a} \sin 2t. \end{cases}$$

$$3.22. \begin{cases} u_{tt} = u_{xx} + 16 \cos 8t \sin 8x, & 0 < x < \pi, \quad t > 0, \\ u(x, 0) = 0, & u_t(x, 0) = 0, \quad u(0, t) = 0, \quad u_x(\pi, t) = 0. \end{cases}$$

4. Багатовимірне хвильове рівняння. Загальний підхід і види

Розглянемо найпростіший вигляд двовимірного хвильового рівняння:

$$u_{tt} = u_{xx} + u_{yy}. \quad (4.1)$$

Розв'язок (4.1) може не залежати від y , і тоді рівняння зводять до одновимірного, одержуючи розв'язок вигляду $u = f(x \pm t)$. Аналогічно розв'язки, що не залежать від x , мають вигляд $u = f(y \pm t)$, — їх називають **плоскими хвилями**.

Це не єдині розв'язки, асоційовні із хвильовими процесами. Якщо перейти до нових координат

$$\begin{cases} \tilde{x} = x \cos \varphi + y \sin \varphi, \\ \tilde{y} = -x \sin \varphi + y \cos \varphi, \end{cases}$$

то рівняння (4.1) не змінюється:

$$\tilde{u}_{tt} = \tilde{u}_{\tilde{x}\tilde{x}} + \tilde{u}_{\tilde{y}\tilde{y}}.$$

Тоді розв'язком буде функція $u = f(\tilde{x} - t) = f(x \cos \varphi + y \sin \varphi - t)$, яку коротко записують у вигляді

$$u = f(t - \langle n, \tilde{x} \rangle),$$

де $n = (\cos \varphi, \sin \varphi)$ — вектор, що вказує *напрямок поширення* плоскої хвилі.

Розглянемо багатовимірне рівняння:

$$u_{tt} = \Delta u. \quad (4.2)$$

Розв'язки, де $x \in \mathbb{R}^n$, за типом плоских хвиль можна подати у вигляді $u = F(t - \langle \theta, x \rangle)$, де θ — одиничний вектор (точка одиничної сфери). Тоді загальний розв'язок рівняння (4.2) можна зобразити у вигляді

$$u = \int_{\theta \in S_n} F(t - \langle \theta, x \rangle) dS,$$

тобто у вигляді сум плоских хвиль. Тому рівняння (4.2) називають **багатовимірним хвильовим рівнянням**.

Ще один тип розв'язку хвильового характеру рівняння (4.1) асоціюється із хвилями, утворюваними від кинутого у воду каменя. Це розв'язок радіального типу

$$u = u(t, r),$$

де $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ у тривимірному випадку. Обчисливши похідні, одержимо співвідношення

$$\begin{aligned} u_x &= u_r r_x = \frac{1}{r} u_r x, & u_y &= u_r r_y = \frac{1}{r} u_r y, \\ u_{xx} &= \left(\frac{1}{r} u_r \right)_r \frac{x^2}{r} + \frac{1}{r} u_r, & u_{yy} &= \left(\frac{1}{r} u_r \right)_r \frac{y^2}{r} + \frac{1}{r} u_r, & u_{zz} &= \left(\frac{1}{r} u_r \right)_r \frac{z^2}{r} + \frac{1}{r} u_r, \\ \Delta u &= \left(\frac{1}{r} u_r \right)_r r + \frac{1}{r} u_r = u_{rr} + \frac{n-1}{r} u_r. \end{aligned}$$

Отже, для радіального розв'язку рівняння (4.2) набуває вигляду

$$u_{tt} = u_{rr} + \frac{n-1}{r} u_r, \quad (4.3)$$

який називають **рівнянням Ейлера–Пуассона–Дарбу**. Позбувшись від u_r і ввівши заміну $u = r^\alpha v$, одержимо

$$\begin{aligned} u_r &= \alpha r^{\alpha-1} v + r^\alpha v_r, \\ u_{rr} &= \alpha(\alpha-1) r^{\alpha-2} v + 2\alpha r^{\alpha-1} v_r + r^\alpha v_{rr}. \end{aligned}$$

Для позбавлення від v і v_r необхідно, щоб

$$\begin{cases} \alpha(\alpha-1) + \alpha(n-1) = 0, \\ 2\alpha + (n-1) = 0. \end{cases} \Rightarrow n = 3, \alpha = -1.$$

Отже, розмірність 3 з погляду хвильового рівняння виявляється особливою: тільки у тривимірному випадку вдається позбутися молодших похідних.

Отже, у тривимірному випадку для v ми отримаємо рівняння

$$v_{tt} = v_{rr}.$$

Його розв'язок має вигляд $v(t, r) = f(t-r) + g(t+r)$, а розв'язок вихідного рівняння — вигляд

$$u(t, x, y, z) = \frac{f(t-r) + g(t+r)}{r}, \quad (4.4)$$

який називають **сферичною хвилею**.

4.1. Формула Пуассона у випадку тривимірного хвильового рівняння

Перейдемо до основного завдання: знайти розв'язок хвильового рівняння, яке ми запишемо двома способами:

$$\begin{cases} u_{tt} = a^2 (u_{xx} + u_{yy} + u_{zz}), \\ u|_{t=0} = \varphi(x, y, z), \quad u_t|_{t=0} = \psi(x, y, z), \end{cases} \quad \begin{cases} u_{tt} = a^2 \Delta u, \\ u|_{t=0} = \varphi(x), \quad u_t|_{t=0} = \psi(x). \end{cases}$$

У другій формі x — тривимірний вектор, що відповідає (x, y, z) у першому записі. Для спрощення запису шукатимемо розв'язок рівняння у другій формі. Для будь-якої точки $x \in \mathbb{R}^3$ розглянемо функцію

$$U(t, r, x) = \frac{1}{4\pi r^2} \int_{\xi \in S_r(x)} u(t, \xi) dS,$$

де $S_r(x)$ — сфера радіуса r із центром у точці x , і дослідимо її зв'язок з розв'язком. Ця функція зручна тому, що $U(t, r, x) \xrightarrow{r \rightarrow 0} u(t, x)$. Обчислимо другу похідну за часом

$$U_{tt} = \frac{1}{4\pi r^2} \int_{\xi \in S_r(x)} u_{tt}(t, \xi) dS$$

і похідні функції $U(t, r, x)$ за r . Для цього зробимо під інтегралом заміну $\xi = x + r\theta$, звідки $r\theta = \xi - x \in S_r(0)$, а, отже, $\theta \in S_1(0)$. Тоді, оскільки $dS_r = r^2 dS_1$,

$$\begin{aligned} U_r &= \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{4\pi} \int_{\theta \in S_1(0)} u(t, x + r\theta) dS \right) = \frac{1}{4\pi} \int_{\theta \in S_1(0)} (\nabla u(t, x + r\theta), \theta) dS = \\ &= \frac{1}{4\pi r^2} \int_{\xi \in S_r(x)} (\nabla u(t, \xi), \theta) dS = \frac{1}{4\pi r^2} \int_{\xi \in B_r(x)} \Delta u(t, \xi) dV = \\ &= \frac{1}{4\pi r^2} \int_0^r \int_{\xi \in S_\rho(x)} \Delta u(t, \xi) dS d\rho. \end{aligned}$$

Тепер помножимо отриману рівність на r^2 і знову продиференціюємо за r . Одержимо

$$(r^2 U_r)_r = \frac{1}{4\pi} \int_{\xi \in S_r(x)} \Delta u(t, \xi) dS.$$

Отже, якщо $u(t, x)$ — розв'язок хвильового рівняння, то для функції U можна написати диференціальне рівняння

$$U_{tt} = a^2 (r^2 U_r)_r \frac{1}{r^2} = a^2 \left(U_{rr} + \frac{2}{r} U_r \right),$$

тобто функція U задовольняє рівняння (4.3). Для того щоб знайти розв'язок, скористаємося початковими умовами:

$$U(t, r, x)|_{t=0} = \frac{1}{4\pi r^2} \int_{\xi \in S_r(x)} \Phi(\xi) dS, \quad U_t(t, r, x)|_{t=0} = \frac{1}{4\pi r^2} \int_{\xi \in S_r(x)} \Psi(\xi) dS.$$

Заміною $U = \frac{V}{r}$, $V = rU$ зведемо рівняння Ейлера–Пуассона–Дарбу до хвильового рівняння $V_{tt} = a^2 V_{rr}$, причому $V|_{r=0} = 0$. Його розв'язок матиме вигляд $V = f(t - ar) + g(t + ar)$. Позначивши

$$V|_{t=0} = \frac{1}{4\pi r} \int_{\xi \in S_r(x)} \Phi(\xi) dS = \Phi(r), \quad V_t|_{t=0} = \frac{1}{4\pi r} \int_{\xi \in S_r(x)} \Psi(\xi) dS = \Psi(r), \quad (4.5)$$

одержимо вираз для $V(t, r)$ (за формулою Д'Аламбера у разі $r > at$ і з огляду на умову $V|_{r=0} = 0$ за $r < at$):

$$V(t, r) = \frac{\Phi(at + r) - \Phi(at - r)}{2} + \frac{1}{2a} \int_{at-r}^{at+r} \Psi(\rho) d\rho.$$

Вираз для U матиме вигляд

$$U(t, r, x) = \frac{\Phi(at + r) - \Phi(at - r)}{2r} + \frac{1}{2ar} \int_{at-r}^{at+r} \Psi(\rho) d\rho.$$

Одержавши формулу для $U(t, r, x)$, зробимо граничний перехід

$$u(t, x) = \lim_{r \rightarrow 0} U(t, r, x) = \Phi'(at) + \frac{1}{a} \Psi(at),$$

що з урахуванням уведених позначень (4.5) дасть

$$u(t, x) = \frac{1}{4\pi a^2 t} \int_{\xi \in S_{at}(x)} \Psi(\xi) dS + \frac{1}{4\pi a^2} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{t} \int_{\xi \in S_{at}(x)} \Phi(\xi) dS \right), \quad (4.6)$$

де dS — елемент площі на сфері радіуса at із центром у точці x . Цю формулу називають **формулою Пуассона**.

Теорема 4.1. Розв'язок початкової задачі для хвильового рівняння в $\mathbb{R}^3$

$$\begin{cases} u_{tt} = a^2 \Delta u, & x \in \mathbb{R}^3; \\ u|_{t=0} = \varphi(x, y, z), & u_t|_{t=0} = \psi(x, y, z) \end{cases}$$

задають формулою Пуассона (4.6). Розв'язок є класичний, якщо $\varphi \in C^2(\mathbb{R}^3)$, $\psi \in C^3(\mathbb{R}^3)$.

4.2. Формула загаяних потенціалів

Принцип Дюамеля дозволяє написати розв'язок і для неоднорідного хвильового рівняння:

$$u_{tt} = a^2 \Delta u + f(t, x, y, z).$$

Нехай розв'язок однорідного рівняння, що задовольняє початкові умови

$$u|_{t=0} = \varphi(x, y, z), \quad u_t|_{t=0} = \psi(x, y, z),$$

у точці $t = 0$ для $\varphi \equiv 0$ має вигляд

$$u(t, x) = \frac{1}{4\pi a^2 t} \int_{\xi \in S_{at}(x)} \psi(\xi) dS,$$

а у точці $t = \tau$ — вигляд

$$u(t, x) = \frac{1}{4\pi a^2 (t - \tau)} \int_{\xi \in S_{a(t-\tau)}(x)} \psi_\tau(\xi) dS.$$

Тоді інтеграл Дюамеля (3.6) набуде вигляду

$$u(t, x) = \int_0^t \frac{1}{4\pi a^2 (t - \tau)} \int_{\xi \in S_{at}(x)} f(\tau, \xi) dS d\tau = \frac{1}{4\pi a^2} \int_0^{at} \int_{\xi \in S_\rho(x)} \frac{f(t - \frac{\rho}{a}, \xi)}{\rho} dS d\rho,$$

де замінено змінні $\rho = a(t - \tau)$. Останній вираз можна зобразити у вигляді

$$u(t, x) = \frac{1}{4\pi a^2} \int_{\xi \in B_{at}(x)} \frac{f\left(t - \frac{|\xi - x|}{a}, \xi\right)}{|\xi - x|} dV, \quad (4.7)$$

який називають **формулою загаяних потенціалів** (тут інтегрування проведено за об'ємом V , який охоплює кулю B_{at}).

Теорема 4.2. Розв'язок початкової задачі для неоднорідного хвильового рівняння в $\mathbb{R}^3$, що задовольняє нульові початкові умови

$$\begin{cases} u_{tt} = a^2 \Delta u + f(t, x, y, z), & x \in \mathbb{R}^3; \\ u|_{t=0} = u_t|_{t=0} = 0, \end{cases}$$

задають формулою загаяних потенціалів

$$u(x) = \int \frac{f(\xi)}{|\xi - x|} d\xi. \quad (4.8)$$

4.3. Формула Кірхгофа

Об'єднання формули Пуассона й формули загаяних потенціалів дає формулу, яку часто називають **формулою Кірхгофа** (розв'язку задачі Коші для хвильового рівняння).

Теорема 4.3. Нехай $\varphi(x) \in C^3(\mathbb{R}^3)$, $\psi(x) \in C^2(\mathbb{R}^3)$. Тоді класичний розв'язок задачі Коші

$$\begin{cases} u_{tt} = a^2 \Delta u(t, x), & t > 0, \quad x \in \mathbb{R}^3; \\ u|_{t=0} = \varphi(x), \quad u_t|_{t=0} = \psi(x) \end{cases}$$

задають **формулою Кірхгофа**:

$$u(t, x) = \frac{1}{4\pi a^2 t} \int_{\xi \in S_{at}(x)} \psi(\xi) dS + \frac{1}{4\pi a^2 t^2} \int_{\xi \in S_{at}(x)} \varphi(\xi) dS + \frac{1}{4\pi a t} \int_{\xi \in S_{at}(x)} \frac{\partial}{\partial n} \varphi(\xi) dS. \quad (4.9)$$

Приклад 10. Застосувавши формулу Кірхгофа, знайти розв'язок задачі Коші для хвильового рівняння у просторі:

$$\begin{cases} u_{tt} = u_{xx} + u_{yy} + u_{zz}, \\ u|_{t=0} = 0, \quad u_t|_{t=0} = (x - y + z)^2. \end{cases}$$

Розв'язання. Запишемо формулу Кірхгофа (4.9) з урахуванням заданих умов:

$$u(x, y, z, t) = \frac{1}{4\pi t} \iint_S (x_0 - y_0 + z_0)^2 dS, \quad (4.10)$$

де S — поверхня сфери радіуса $R = t$ із центром у точці $(x; y; z)$. Перейдемо до сферичних координат:

$$\begin{aligned} x_0 &= x + t \sin \theta \cos \varphi, & y_0 &= y + t \sin \theta \sin \varphi, & z_0 &= z + t \cos \theta, \\ dS &= t^2 \sin \theta d\theta d\varphi. \end{aligned} \quad (4.11)$$

Підставивши (4.11) в (4.10), матимемо

$$\begin{aligned} u(x, y, z, t) &= \frac{t}{4\pi} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi (x + t \sin \theta \cos \varphi - y - t \sin \theta \sin \varphi)^2 \sin \theta d\theta + \\ &+ \frac{t}{4\pi} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi (z + t \cos \theta)^2 \sin \theta d\theta = \frac{t}{4\pi} \int_0^{2\pi} d\varphi \left\{ (x - y + z)^2 \int_0^\pi \sin \theta d\theta \right\} + \\ &+ \frac{t}{4\pi} \int_0^{2\pi} d\varphi \left\{ t^2 \int_0^\pi (\sin \theta \cos \varphi - \sin \theta \sin \varphi + \cos \theta)^2 \sin \theta d\theta \right\} + \\ &+ \frac{t}{4\pi} \int_0^{2\pi} d\varphi \cdot 2t(x - y + z) \int_0^\pi (\sin \theta \cos \varphi - \sin \theta \sin \varphi + \cos \theta) \sin \theta d\theta = \\ &= \int_0^{2\pi} \frac{td\varphi}{4\pi} \left\{ 2(x - y + z)^2 + t^2 \left(2 - \sin 2\varphi \int_0^\pi \sin^3 \theta d\theta + \cos \varphi \int_0^\pi \sin \theta \sin 2\theta d\theta \right) \right\} + \\ &+ \frac{t}{4\pi} \int_0^{2\pi} d\varphi \left\{ -t^2 \sin \varphi \int_0^\pi \sin 2\theta \sin \theta d\theta + 2t(x - y + z) \cos \varphi \int_0^\pi \sin^2 \theta d\theta \right\} + \\ &\frac{t}{4\pi} \int_0^{2\pi} d\varphi \left\{ -2t(x - y + z) \sin \varphi \int_0^\pi \sin^2 \theta d\theta + t(x - y + z) \int_0^\pi \sin 2\theta d\theta \right\} = \\ &= \frac{t}{4\pi} \int_0^{2\pi} \left[2(x - y + z)^2 + t^2 \left(2 - \frac{4}{3} \sin 2\varphi \right) + \pi t(x - y + z)(\cos \varphi - \sin \varphi) \right] d\varphi = \\ &= \frac{t}{4\pi} \left\{ 4\pi(x - y + z)^2 + 4\pi t^2 - \frac{4t^2}{3} \int_0^{2\pi} \sin 2\varphi d\varphi \right\} + \\ &+ \frac{t}{4\pi} \left\{ \pi t(x - y + z) \left[\int_0^{2\pi} \cos \varphi d\varphi - \int_0^{2\pi} \sin \varphi d\varphi \right] \right\} = \end{aligned}$$

$$= \frac{t}{4\pi} \left\{ 4\pi (x - y + z)^2 + 4\pi t^2 \right\} = t \left(t^2 + (x - y + z)^2 \right).$$

Завдання для самостійного виконання

Застосовуючи формулу Кірхгофа, знайти розв'язки задач Коші для хвильових рівнянь у просторі:

$$\begin{array}{ll} 4.1. \begin{cases} u_{tt} = 4(u_{xx} + u_{yy} + u_{zz}), \\ u|_{t=0} = 0, \quad u_t|_{t=0} = (x - 2y + z)^2. \end{cases} & 4.4. \begin{cases} u_{tt} = 25(u_{xx} + u_{yy} + u_{zz}), \\ u|_{t=0} = u_t|_{t=0} = \cos \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}. \end{cases} \\ 4.2. \begin{cases} u_{tt} = 9(u_{xx} + u_{yy} + u_{zz}), \\ u|_{t=0} = 0, \quad u_t|_{t=0} = (x + y - z)^2. \end{cases} & 4.5. \begin{cases} u_{tt} = (u_{xx} + u_{yy} + u_{zz}) + 2xyz, \\ u|_{t=0} = x^2 + y^2 - 2z^2, \quad u_t|_{t=0} = 1. \end{cases} \\ 4.3. \begin{cases} u_{tt} = 16(u_{xx} + u_{yy} + u_{zz}), \\ u|_{t=0} = u_t|_{t=0} = (x^2 + y^2 + z^2). \end{cases} & 4.6. \begin{cases} u_{tt} = (u_{xx} + u_{yy} + u_{zz}) + e^t, \\ u|_{t=0} = u_t|_{t=0} = 0. \end{cases} \end{array}$$

4.4. Застосування методу спуску для двовимірного хвильового рівняння

Розв'яжемо задачу Коші

$$\begin{cases} u_{tt} = a^2 \Delta u, & t > 0, \quad x \in \mathbb{R}^n, \\ u|_{t=0} = \varphi(x), \quad u_t|_{t=0} = \psi(x), \end{cases}$$

у разі двох просторових змінних за $n = 2$, $x \in \mathbb{R}^2$. Виявляється, що формулу розв'язку задачі Коші у разі $n = 2$ виводять із аналогічної формули розмірності $n = 3$. Метод, що дозволяє *звести задачу більшої розмірності до задачі меншої розмірності*, називають **методом спуску**.

Нехай функція $u(t, x) = u(t, x, y, z)$ є розв'язок задачі Коші у разі $n = 3$ і нехай початкові функції не залежать від z , тобто $\psi = \psi(x, y)$, $\varphi = \varphi(x, y)$. Розв'язок цієї задачі визначимо формулою Пуассона (4.6):

$$u(t, x, y, z) = \frac{1}{4\pi a^2 t} \int_{(\xi, \eta, \zeta) \in S_{at}(x, y, z)} \psi(\xi, \eta) dS + \frac{\partial}{\partial t} \frac{1}{4\pi a^2 t} \int_{(\xi, \eta, \zeta) \in S_{at}(x, y, z)} \varphi(\xi, \eta) dS,$$

де dS — елемент площі на сфері радіуса at із центром у точці (x, y, z) , (ξ, η, ζ) — вектор. З огляду на специфічність початкових функцій інтегрування за сферою в $\mathbb{R}^3$ можна звести до інтегрування за колом в $\mathbb{R}^2$. Сферу радіуса R із центром у точці (x, y, z) спроектуємо в коло того самого радіуса R із центром у точці (x, y) . Проекція дворазова: одній і тій самій точці на колі

відповідають дві точки у просторі: одна на верхній, а інша на нижній півсфері. Оскільки φ, ψ не залежать від z , інтеграли за верхньою та нижньою півсферами збігаються, і ми можемо розглядати тільки верхню півсферу, подвоївши інтеграл:

$$u(t, x, y, z) = \frac{1}{2\pi a^2 t} \int_{(\xi, \eta, \zeta) \in S_{at}^+(x, y, z)} \psi(\xi, \eta) dS + \frac{\partial}{\partial t} \frac{1}{2\pi a^2 t} \int_{(\xi, \eta, \zeta) \in S_{at}^+(x, y, z)} \varphi(\xi, \eta) dS.$$

Координати будь-якої точки сфери (ξ, η, ζ) пов'язані з координатами центра сфери співвідношеннями

$$\xi = x + R \sin \alpha \cos \beta, \quad \eta = y + R \sin \alpha \sin \beta, \quad \zeta = z + R \cos \alpha,$$

де R — радіус сфери, α — кут між нормаллю до сфери і віссю z , β — кут між проєкцією нормалі на площину кола із центром (x, y) і віссю x . Елемент площі кола дорівнює $d\xi d\eta = J d\alpha d\beta$, де J — якобіан заміни змінних $(\xi, \eta) \rightarrow (\alpha, \beta)$:

$$J = \begin{vmatrix} R \cos \alpha \cos \beta & -R \sin \alpha \sin \beta \\ R \cos \alpha \sin \beta & R \sin \alpha \cos \beta \end{vmatrix} = R^2 \cos \alpha \sin \alpha,$$

$$d\xi d\eta = R^2 \cos \alpha \sin \alpha d\alpha d\beta = \cos \alpha dS \quad \Rightarrow \quad dS = \frac{d\xi d\eta}{\cos \alpha},$$

оскільки $dS = R^2 \sin \alpha d\alpha d\beta$, $\cos \alpha = \frac{\zeta - z}{R}$, $\zeta - z = \sqrt{R^2 - (x - \xi)^2 - (y - \eta)^2}$, остаточно одержимо

$$dS = \frac{R d\xi d\eta}{\sqrt{R^2 - (x - \xi)^2 - (y - \eta)^2}}.$$

З огляду на те що $R = at$ і в кожному точку кола спроектовано дві точки сфери, одержимо

$$\begin{aligned} u(t, x, y, z) &= \frac{1}{2\pi a^2 t} \int_{(\xi, \eta, \zeta) \in S_{at}^+(x, y, z)} \psi(\xi, \eta) dS + \frac{\partial}{\partial t} \frac{1}{2\pi a^2 t} \int_{(\xi, \eta, \zeta) \in S_{at}^+(x, y, z)} \varphi(\xi, \eta) dS = \\ &= \frac{at}{2\pi a^2 t} \int_{(\xi, \eta) \in B_{at}(x, y)} \frac{\psi(\xi, \eta) d\xi d\eta}{\sqrt{a^2 t^2 - (x - \xi)^2 - (y - \eta)^2}} + \\ &\quad + \frac{\partial}{\partial t} \frac{at}{2\pi a^2 t} \int_{(\xi, \eta) \in B_{at}(x, y)} \frac{\varphi(\xi, \eta) d\xi d\eta}{\sqrt{a^2 t^2 - (x - \xi)^2 - (y - \eta)^2}}. \end{aligned}$$

Якщо (x, y) — двовимірний вектор, його можна замінити одною літерою $(x, y) = x$, тоді формулу записують коротше:

$$u(t, x) = \frac{1}{2\pi a} \int_{\xi \in B_{at}(x)} \frac{\psi(\xi)}{\sqrt{a^2 t^2 - |\xi - x|^2}} dS + \frac{\partial}{\partial n} \frac{1}{2\pi a} \int_{\xi \in B_{at}(x)} \frac{\varphi(\xi)}{\sqrt{a^2 t^2 - |\xi - x|^2}} dS. \quad (4.12)$$

Цю формулу також називають **формулою Пуассона**.

Теорема 4.4. Нехай функції $\varphi(x, y) \in C^3(\mathbb{R}^2)$, $\psi(x, y) \in C^2(\mathbb{R}^2)$. Тоді розв'язок задачі Коші

$$\begin{cases} u_{tt} = a^2 \Delta u, & t > 0, \quad x \in \mathbb{R}^n, \\ u|_{t=0} = \varphi(x), \quad u_t|_{t=0} = \psi(x), \end{cases}$$

задають формулою Пуассона (4.12).

Приклад 11. Скориставшись формулою Пуассона, знайти розв'язок задачі Коші для хвильового рівняння на площині:

$$\begin{cases} u_{tt} = a^2 (u_{xx} + u_{yy}), \\ u|_{t=0} = 0, \quad u_t|_{t=0} = (x + y)^2. \end{cases}$$

Розв'язання. Запишемо формулу (4.12) з урахуванням співвідношення $U(x, y, 0) = 0$:

$$u(x, y, t) = \frac{1}{2\pi a} \iint_{r < at} \frac{(x_0 + y_0)^2 dx_0 dy_0}{\sqrt{a^2 t^2 - (x - x_0)^2 - (y - y_0)^2}}. \quad (4.13)$$

Перейдемо до полярних координат. Для довільної точки мають місце співвідношення

$$x_0 = x + r \cos \varphi, \quad y_0 = y + r \sin \varphi. \quad (4.14)$$

Підставивши (4.14) в (4.13), матимемо

$$\begin{aligned} u(x, y, t) &= \frac{1}{2\pi a} \iint_{r < at} \frac{(x + y + r \cos \varphi + r \sin \varphi)^2 r dr d\varphi}{\sqrt{a^2 t^2 - r^2}} = \\ &= \frac{1}{2\pi a} \iint_{r < at} \frac{(x + y)^2 + r^2 (1 + \sin 2\varphi) + 2(x + y)r(\cos \varphi + \sin \varphi)}{\sqrt{a^2 t^2 - r^2}} r dr d\varphi = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2\pi a} \left((x+y)^2 \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{at} \frac{r dr}{\sqrt{a^2 t^2 - r^2}} + \int_0^{2\pi} (1 + \sin 2\varphi) d\varphi \int_0^{at} \frac{r^3 dr}{\sqrt{a^2 t^2 - r^2}} \right) + \\
&\quad + \frac{1}{2\pi a} \cdot 2(x+y) \int_0^{2\pi} (\cos \varphi + \sin \varphi) d\varphi \int_0^{at} \frac{r^2 dr}{\sqrt{a^2 t^2 - r^2}} = \\
&\quad = \frac{1}{2\pi a} \left((x+y)^2 2\pi a t + 2\pi \frac{2a^3 t^3}{3} \right) = \frac{2}{3} a^2 t^3 + (x+y)^2 t.
\end{aligned}$$

Завдання для самостійного виконання

Скориставшись формулою Пуассона, знайти розв'язки задач Коші для хвильових рівнянь на площині:

$$4.7. \begin{cases} u_{tt} = a^2 (u_{xx} + u_{yy}), \\ u|_{t=0} = 0, \quad u_t|_{t=0} = (2x + y)^2. \end{cases}$$

$$4.8. \begin{cases} u_{tt} = 2(u_{xx} + u_{yy}), \\ u|_{t=0} = 2x^2 - y^2, \quad u_t|_{t=0} = 2x^2 + y^2. \end{cases}$$

$$4.9. \begin{cases} u_{tt} = a^2 (u_{xx} + u_{yy}), \\ u|_{t=0} = u_t|_{t=0} = (x^2 + y^2)^2. \end{cases}$$

$$4.10. \begin{cases} u_{tt} = a^2 (u_{xx} + u_{yy}), \\ u|_{t=0} = 0, \quad u_t|_{t=0} = (x - y)^2. \end{cases}$$

$$4.11. \begin{cases} u_{tt} = (u_{xx} + u_{yy}) + 2, \\ u|_{t=0} = x, \quad u_t|_{t=0} = y. \end{cases}$$

$$4.12. \begin{cases} u_{tt} = 3(u_{xx} + u_{yy}) + x^3 + y^3, \\ u|_{t=0} = x^2, \quad u_t|_{t=0} = y^2. \end{cases}$$

4.5. Метод розділення змінних для двовимірної хвильової рівняння

Розглянемо найпростіший випадок двовимірної однорідної хвильової рівняння:

$$u_{tt} = u_{xx} + u_{yy}.$$

Спробуємо розділити змінні, перейшовши до полярних координат. Тоді вихідне рівняння набуде вигляду

$$u_{tt} = u_{rr} + \frac{1}{r} u_r + \frac{1}{r^2} u_{\varphi\varphi} \quad (4.15)$$

і розв'язок шукатимемо у вигляді

$$u(t, r, \varphi) = h(t) v(r) q(\varphi).$$

Розділимо змінні:

$$h'' v q = h v'' q + \frac{1}{r} h v' q + \frac{1}{r^2} h v q'' \Rightarrow \frac{h''}{h} = \frac{v'' + \frac{1}{r} v'}{v} + \frac{1}{r^2} \frac{q''}{q} = \lambda.$$

Зробити це повністю не вдається, тому що права частина, на відміну від лівої, не залежить від t :

$$h'' = \lambda h, \quad (4.16-a)$$

$$\frac{v'' + \frac{1}{r}v'}{v} + \frac{1}{r^2} \frac{q''}{q} = \lambda. \quad (4.16-б)$$

Тепер у рівнянні (4.16-б) продовжимо розділення змінних:

$$r^2 \frac{v'' + \frac{1}{r}v'}{v} - \lambda r^2 + \frac{q''}{q} = 0.$$

Перші два доданки залежать від r , а третій — від φ , отже, можна звести рівняння до двох:

$$q'' = \mu q, \quad (4.17-a)$$

$$v'' + \frac{1}{r}v' + \left(\frac{\mu}{r^2} - \lambda \right) v = 0. \quad (4.17-б)$$

Розв'язок рівняння (4.17-а), що залежить від кутової змінної, повинен задовольняти умови періодичності

$$q(0) = q(2\pi), \quad q'(0) = q'(2\pi),$$

звідки

$$\mu_n = -n^2, \quad q_n = A \cos n\varphi + B \sin n\varphi.$$

З урахуванням цього рівняння перетворимо (4.17-б) на

$$v'' + \frac{1}{r}v' = \left(\frac{n^2}{r^2} + \lambda \right) v = 0.$$

Замінивши $r = \tilde{r}/\sqrt{\lambda}$, одержимо рівняння

$$\tilde{v}'' + \frac{1}{\tilde{r}}\tilde{v}' - \left(\frac{n^2}{\tilde{r}^2} + 1 \right) \tilde{v} = 0, \quad (4.18)$$

яке називають **рівнянням Бесселя** (див. розділ 7.6.). Незважаючи на те що воно відіграє важливу роль у теорії рівнянь в частинних похідних, його розв'язки в елементарних функціях не виражаються.

Приклад 12. Розв'язати змішану задачу для хвильового рівняння у прямокутнику:

$$\begin{cases} u_{tt} = \Delta u, \\ u|_{t=0} = \frac{xy}{64} (2-x)(3-y), \quad u_t|_{t=0} = 0, \quad u|_{x=0} = u|_{y=0} = u|_{x=2} = u|_{y=3} = 0. \end{cases}$$

Розв'язання. Шукатимемо розв'язок у вигляді

$$u(x, y, t) = X(x) Y(y) T(t). \quad (4.19)$$

Підставивши (4.19) у вихідне рівняння, одержимо

$$X(y) Y(y) \ddot{T}(t) = (X''(x) Y(y) + X(x) Y''(y)) T(t).$$

Розділимо змінні:

$$\frac{X''(x)}{X(x)} + \frac{Y''(y)}{Y(y)} = \frac{\ddot{T}(t)}{T(t)};$$

$$X''(x) + \lambda X(x) = 0, \quad X(0) = X(2) = 0, \quad (4.20-a)$$

$$Y''(y) + \mu Y(y) = 0, \quad Y(0) = Y(3) = 0, \quad (4.20-b)$$

$$\ddot{T}(t) + (\lambda + \mu) T(t) = 0. \quad (4.20-в)$$

Загальний розв'язок (4.20-a), як відомо, має вигляд

$$X(x) = C_1 \cos \sqrt{\lambda} x + C_2 \sin \sqrt{\lambda} x.$$

Із початкових умов одержимо $X(0) = C_1 = 0$, $X(2) = C_2 \sin 2\sqrt{\lambda} = 0$, звідки

$$\lambda_k = \frac{\pi^2 k^2}{4}. \quad (4.21)$$

Отже,

$$X_k(x) = C_k \sin \frac{\pi k}{2} x, \quad k = 1, 2, \dots \quad (4.22)$$

Аналогічно з (4.20-b) отримаємо, що

$$\lambda_m = \frac{\pi^2 m^2}{9}; \quad (4.23)$$

$$Y_m(y) = D_m \sin \left(\frac{\pi m}{3} y \right), \quad m = 1, 2, \dots \quad (4.24)$$

За аналогією для часової функції з (4.20-в) одержимо, що

$$T_m(t) = E_{m1} \cos \left(\pi \sqrt{\frac{m^2}{9} + \frac{k^2}{4}} t \right) + E_{m2} \sin \left(\pi \sqrt{\frac{m^2}{9} + \frac{k^2}{4}} t \right). \quad (4.25)$$

Поєднавши (4.19), (4.21) і (4.22)-(4.24), отримаємо

$$u(x, y, t) = \sum_{k,m=1}^{\infty} \left\{ (A_{km} \cos \left(\pi \sqrt{\frac{m^2}{9} + \frac{k^2}{4}} t \right) + B_{km} \sin \left(\pi \sqrt{\frac{m^2}{9} + \frac{k^2}{4}} t \right) \right\} \sin \frac{\pi k}{2} x \sin \frac{\pi m}{3} y, \quad (4.26)$$

де $A_{km} = C_k D_m E_{m1}$, $B_{km} = C_k D_m E_{m2}$. Скористаємося початковими умовами:

$$u_t|_{t=0} = \sum_{k,m=1}^{\infty} \pi B_{km} \sqrt{\frac{m^2}{9} + \frac{k^2}{4}} \sin \frac{\pi k}{2} x \sin \frac{\pi m}{3} y = 0 \Rightarrow B_{km} \equiv 0.$$

Тепер

$$u|_{t=0} = \sum_{k,m=1}^{\infty} A_{km} \sin \frac{\pi k}{2} x \sin \frac{\pi m}{3} y = \frac{xy}{64} (2-x)(3-y).$$

Звідси знайдемо A_{km} :

$$A_{km} = \int_0^3 \frac{3y - y^2}{3} \sin \frac{\pi m y}{3} dy \int_0^2 \frac{2x - x^2}{32} \sin \frac{\pi k x}{2} dx = \frac{9 \left((-1)^k - 1 \right) \left((-1)^m - 1 \right)}{k^3 m^3 \pi^6}.$$

Підставивши отриманий результат у (4.26), одержимо

$$u(x, y, t) = \frac{9}{\pi^6} \sum_{\mu, \nu=0}^{\infty} \frac{1}{(2\mu - 1)^3 (2\nu - 1)^3} \cos \left(\pi \sqrt{\frac{(2\mu - 1)^2}{4} + \frac{(2\nu - 1)^2}{9}} t \right) \times \\ \times \sin \left(\frac{\pi (2\mu - 1)}{2} x \right) \sin \left(\frac{\pi (2\nu - 1)}{3} y \right).$$

Завдання для самостійного виконання

Розв'язати змішані задачі для хвильового рівняння у прямокутнику:

$$4.13. \begin{cases} u_{tt} = 9\Delta u, \\ u(x, y, 0) = xy(4-x)(5-y), \quad u_t(x, y, 0) = 0, \\ u|_{x=0} = u|_{y=0} = u|_{x=4} = u|_{y=5} = 0. \end{cases}$$

$$4.14. \begin{cases} u_{tt} = 4\Delta u, \\ u(x, y, 0) = x(3-x)(4-y), \quad u_t(x, y, 0) = 0, \\ u|_{x=0} = u|_{y=0} = u|_{x=3} = u|_{y=4} = 0. \end{cases}$$

Приклад 13. Розв'язати змішану задачу для хвильового рівняння у колі:

$$\begin{cases} u_{tt} = \Delta u, & 0 \leq r < 25, \quad 0 < t < \infty, \\ u(r, 0) = \frac{1}{8} \left[1 - \left(\frac{r}{25} \right)^2 \right], & u_t(r, 0) = 0, \quad u(25, t) = 0. \end{cases}$$

Розв'язання. Перейдемо до полярної системи координат. Оскільки ані коефіцієнти рівняння, ані його крайові умови не залежать від полярного кута, припустимо, що не залежить від нього і розв'язок. Відповідно, шукатимемо розв'язок у вигляді

$$u(r, \varphi, t) \equiv U(r, t) = R(r) T(t). \quad (4.27)$$

Підставивши (4.27) у вихідне рівняння та розділивши змінні, одержимо

$$\frac{R''(r)}{R(r)} + \frac{1}{r} \frac{R'(r)}{R(r)} = \frac{\ddot{T}(t)}{T(t)} = -\lambda,$$

звідки

$$rR''(r) + R'(r) + \lambda r R(r) = 0, \quad |R(0)| < \infty, \quad R(25) = 0, \quad (4.28-a)$$

$$\ddot{T}(t) + \lambda T(t) = 0. \quad (4.28-b)$$

Легко побачити, що (4.28-a) — це окремий випадок рівняння Бесселя, який має розв'язок

$$R(r) = C_1 J_0(\sqrt{\lambda} r) + C_2 Y_0(\sqrt{\lambda} r),$$

де J_0 і Y_0 — функції Бесселя й Неймана нульового порядку відповідно (див. розділ 7.6.). Вимагаючи обмеженості $R(r)$ у нулі, знайдемо умову $C_2 \equiv 0$. Далі, скориставшись умовою $R(25) = 0$, матимемо

$$J_0(25\sqrt{\lambda}) = 0,$$

звідки

$$\lambda_k = \frac{\mathbf{v}_k^2}{625}, \quad k = 1, 2, \dots, \quad (4.29)$$

де $\mathbf{v}_k$ — k -й нуль функції Бесселя нульового порядку. Тоді

$$R_k(r) = C_k J_0\left(\mathbf{v}_k \frac{r}{25}\right). \quad (4.30)$$

Відповідно, для часової функції з (4.28-б) одержимо

$$T_k(t) = D_{k1} \cos\left(\frac{\mathbf{v}_k}{25}t\right) + D_{k2} \sin\left(\frac{\mathbf{v}_k}{25}t\right). \quad (4.31)$$

Поєднавши (4.27), (4.30) і (4.31), матимемо

$$u(r, t) = \sum_{k=1}^{\infty} \left(A_k \cos\left(\frac{\mathbf{v}_k}{25}t\right) + B_k \sin\left(\frac{\mathbf{v}_k}{25}t\right) \right) J_0\left(\mathbf{v}_k \frac{r}{25}\right),$$

де $A_k = C_k D_{k1}$, $B_k = C_k D_{k2}$. Скористаємося початковими умовами:

$$u_t(r, 0) = \frac{1}{25} \sum_{k=1}^{\infty} B_k \mathbf{v}_k J_0\left(\mathbf{v}_k \frac{r}{25}\right) = 0, \Rightarrow B_k \equiv 0.$$

$$u(r, 0) = \sum_{k=1}^{\infty} A_k J_0\left(\mathbf{v}_k \frac{r}{25}\right) = \frac{1}{8} \left[1 - \left(\frac{r}{25}\right)^2 \right],$$

звідки

$$A_k = \frac{1}{4J_1^2(\mathbf{v}_k)} \int_0^{25} \left[1 - \left(\frac{r}{25}\right)^2 \right] J_0\left(\mathbf{v}_k \frac{r}{25}\right) \frac{r}{25} d\left(\frac{r}{25}\right) = \frac{J_2(\mathbf{v}_k)}{2\mathbf{v}_k^2 J_1^2(\mathbf{v}_k)}.$$

Отже, остаточно

$$u(r, t) = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{J_2(\mathbf{v}_k)}{\mathbf{v}_k^2 J_1^2(\mathbf{v}_k)} \cos\left(\frac{\mathbf{v}_k}{25}t\right) J_0\left(\mathbf{v}_k \frac{r}{25}\right).$$

Завдання для самостійного виконання

Розв'язати змішані задачі для хвильового рівняння у колі:

$$4.15. \begin{cases} u_{tt} = 3\Delta u, & 0 \leq r < 23, \\ u(r, 0) = \frac{1}{8} \left(1 - \left(\frac{r}{23}\right)^2 \right), & u_t(r, 0) = 0, \quad u(23, t) = 0. \end{cases}$$

$$4.16. \begin{cases} u_{tt} = 2\Delta u, & 0 \leq r < 24, \\ u(r, 0) = \frac{1}{8} \left(1 - \left(\frac{r}{24}\right)^2 \right), & u_t(r, 0) = 0, \quad u(24, t) = 0. \end{cases}$$

5. Рівняння теплопровідності

Рівняння вигляду

$$u_t = u_{xx} \quad (5.1)$$

називають найпростішим **рівнянням теплопровідності** — ним послуговуються під час вивчення процесів поширення тепла, дифузії й багатьох інших розділів фізики. У разі дифузії речовини остання поширюється в розчині. Розглянемо експеримент, у якому крапля чорнил падає в посудину з водою. Згодом вода починає забарвлюватися, що свідчить про поширення чорнил у розчині — цей процес і називають **дифузією**. Для того щоб зрозуміти її модель, ми розглядаємо дискретне середовище. Воно ніби складене зі скриньок, де крапля в кожний наступний момент може «перестрибнути» в одну з двох сусідніх скринь із рівною ймовірністю. У такій постановці «краплю» розглядають як елементарну, неподільну частинку речовини. Для реальної ж краплі «ймовірності» реалізуються як частини, на які вона ділиться, поширюючись у різні боки. Як відомо, ймовірності знаходження частинки в тій або іншій «скрині» являють собою дробі, у яких за $t = n$ у знаменнику стоїть 2^n , а в чисельнику — біноміальний коефіцієнт C_n^k . У разі збільшення n і відповідного перемасштабування ми одержимо криву, що описує густину ймовірності розподілу за законом, відкритим Гауссом.

5.1. Одновимірне рівняння теплопровідності

Запишемо диференціальне рівняння розглянутого вище процесу, у якому $u_n(t)$ — кількість частинок у момент часу t в n -й комірці. Нехай

$$u_n(t + \Delta t) = \frac{1}{2}u_{n-1}(t) + \frac{1}{2}u_{n+1}(t).$$

Позначивши за Δx крок комірки ($\Delta x \cdot n = x$), матимемо

$$u(t, x) = u_n(t), \quad u(t, x + \Delta x) = u_{n+1}(t), \quad u(t, x - \Delta x) = u_{n-1}(t).$$

Тоді закон набуде вигляду, який у разі зменшення Δx і Δu звідний до

$$u_t \Delta t = u_{xx} \frac{(\Delta x)^2}{2} \Rightarrow u_t \Delta t = u_{xx} \cdot \frac{(\Delta x^2)}{2}.$$

Припустивши, що Δt і Δx зменшуються так, що $\Delta t \approx \left(\frac{\Delta x}{\sqrt{2}}\right)^2$, одержимо саме рівняння (5.1).

Частинні розв'язки рівняння (5.1) можна шукати й у вигляді поліномів, і у вигляді рядів за степенями t , але ми скористаємося *автомодельним* прийомом пошуку. Рівняння теплопровідності є інваріантне щодо заміни

$$x = \lambda \tilde{x}, \quad t = \lambda^2 \tilde{t}.$$

Тому доцільно шукати розв'язок у вигляді $u(t, x) = v\left(\frac{x^2}{t}\right)$. Підставивши цю функцію в рівняння, знайдемо її похідні:

$$-\frac{x^2}{t^2}v'\left(\frac{x^2}{t}\right) = \frac{2}{t}v'\left(\frac{x^2}{t}\right) + \frac{4x^2}{t^2}v''\left(\frac{x^2}{t}\right).$$

Якщо позначимо $x^2 = pt$, то отримане співвідношення набуде вигляду

$$-\frac{p}{t}v'(p) = \frac{2}{t}v'(p) + \frac{4p}{t}v''(p).$$

Помноживши рівняння на t , отримаємо звичайне диференціальне рівняння, розв'язавши яке, одержимо

$$v(p) = C \int_p^\infty \frac{e^{-\frac{\sigma}{4}}}{\sqrt{\sigma}} d\sigma = 4C \int_p^\infty e^{-\frac{\sigma}{4}} d\left(\frac{\sqrt{\sigma}}{2}\right) = 4C \int_{\frac{\sqrt{p}}{2}}^\infty e^{-s^2} ds.$$

У такий спосіб ми отримали розв'язок вигляду

$$u(t, x) = C \int_{\frac{x}{2\sqrt{t}}}^\infty e^{-s^2} ds. \quad (5.2)$$

Зсув початку відліку просторової змінної не змінює вихідне рівняння, тому, як неважко перевірити, розв'язком буде і функція $u(t, x) = C \int_{\frac{x-\xi}{2\sqrt{t}}}^\infty e^{-s^2} ds$, і комбінація таких функцій (з огляду на принцип суперпозиції):

$$u(t, x) = \sum_i \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{\frac{|x-\xi_i|}{2\sqrt{t}}}^\infty e^{-s^2} g(\xi_i) ds. \quad (5.3)$$

Вираз (5.3) можна зобразити й у континуальній формі:

$$u(t, x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{\frac{|x-\xi|}{2\sqrt{t}}}^{\infty} e^{-s^2} ds \right) \underbrace{g(\xi) d\xi}_{d \int_{\xi}^{\infty} g(s) ds} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \left(\int_{\frac{|x-\xi|}{2\sqrt{t}}}^{\infty} e^{-s^2} ds \right) \left(\int_{\xi}^{\infty} g(s) ds \right) \Big|_{\xi=-\infty}^{\xi=\infty} -$$

$$- \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{\xi}^{\infty} g(s) ds \frac{1}{\sqrt{4t}} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4t}} d\xi = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} \int_{-\infty}^{\infty} G(\xi) e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4t}} d\xi,$$

$$\text{де } G(\xi) = \int_{\xi}^{\infty} g(s) ds.$$

Формулу

$$u(t, x) = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} \int_{-\infty}^{+\infty} G(\xi) e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4t}} d\xi \quad (5.4)$$

називають **формулою Пуассона**, або **інтегралом Пуассона** (див. розділ 7.1.).

Функція

$$\Phi(t, x, \xi) = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4t}} \quad (5.5)$$

є розв'язок рівняння теплопровідності. Вона відіграє центральну роль з огляду на ряд унікальних властивостей — тому її називають не просто розв'язком, а **фундаментальним розв'язком рівняння теплопровідності**. По-перше, вона невід'ємна й нескінченно диференційовна за $t > 0$, $x \in \mathbb{R}^1$. По-друге, $\lim_{t \rightarrow 0} \Phi(t, x, \xi) = 0$ у разі $x \neq \xi$ скрізь, за винятком однієї точки ($\lim_{t \rightarrow 0} \Phi(t, x, \xi) = \infty$ у разі $x = \xi$). Цікава властивість характерна для інтеграла від цієї функції за віссю $(-\infty, +\infty)$:

$$\frac{1}{\sqrt{4\pi t}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4t}} d\xi = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4t}} d\left(\frac{x-\xi}{\sqrt{4t}}\right) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-s^2} ds = 1.$$

Тобто, хоча функція й прямує за $t \rightarrow 0$ до нуля скрізь, окрім однієї точки, інтеграл від неї дорівнює одиниці (див. рис. (5.1)).

Теорема 5.1. *Розв'язок задачі Коші для рівняння теплопровідності*

$$u_t = u_{xx}, \quad u|_{t=0} = g(x) \quad (5.6)$$

описують формулою Пуассона (5.4):

$$u(t, x) = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{\xi}^{\infty} g(s) e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4t}} ds d\xi. \quad (5.7)$$

Розв'язок є нескінченно диференційовний у разі $t > 0$ для будь-якої неперервної функції $g(x)$, а у разі $t = 0$ він матиме першу похідну за t і другу за x тільки якщо $g(x)$ двічі неперервно диференційовна.

Отже, неперервна й обмежена функція $g(x)$ на дійсній осі в умові задачі Коші забезпечує рівномірну збіжність $u(t, x)$ до $g(x)$ за $t \rightarrow 0$ на кожному відрізку $[-A, A]$ дійсної осі. У такий спосіб формула Пуассона дає розв'язок задачі Коші для рівняння теплопровідності. Основну роль відіграє саме те, що функція $\Phi(t, x, \xi)$ у разі $t \rightarrow 0$ збігається за $x \neq \xi$ до нуля, а за $x = \xi$ прямує до нескінченності, але «такої великої», що інтеграл від неї дає одиницю. Для позначення границі такої функції вводять символічне позначення $\delta(x)$ як функції, що називають **δ -функцією Дірака** (див. розділ 7.3.). Їй притаманна така найважливіша властивість:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x - \xi) g(\xi) d\xi = g(x)$$

для будь-якої неперервної функції $g(x)$.

Зазначимо кілька особливостей, характерних для розв'язання змішаних задач теплопровідності. Розглянемо задачу (5.6), але поставлену на півосі $x > 0$ з крайовою умовою за $x = 0$.

1. Якщо крайова умова $u|_{x=0} = 0$, то продовження $g(x)$ непарним способом дає за допомогою формули Пуассона розв'язок цієї задачі. Умови узгодження визначають як і у разі хвильового рівняння: $g(0) = 0$ і $g''(0) = 0$.

2. Якщо крайова умова $u_x|_{x=0} = 0$, функцію $g(x)$ варто продовжити вже парним способом. Обчисливши $u_x(t, x)$:

$$u_x(t, x) = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} \int_{-\infty}^{\infty} -\frac{x - \xi}{2t} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4t}} g(\xi) d\xi$$

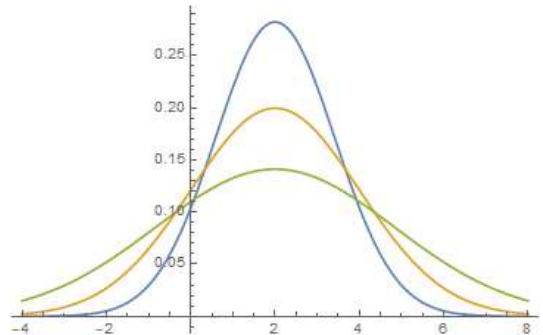


Рис. 5.1. Графічне зображення функції (5.5) в різні моменти часу

і проінтегрувавши цей вираз частинами, одержимо

$$u_x(t, x) = -\frac{1}{\sqrt{4\pi t}} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4t}} g(\xi) \Big|_{-\infty}^{+\infty} + \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4t}} g'(\xi) d\xi.$$

Перший доданок дорівнює нулю, другий за $x = 0$ перетворюється на нуль з огляду на непарність $g'(\xi)$ (ми також повинні вимагати, що крім $g(x)$, існує й її обмежена похідна $g'(x)$). Умови узгодження, що гарантують класичну гладкість розв'язку, мають природну форму $g'(0) = 0$.

Теорема 5.2. *Задачу Коші для багатовимірного рівняння теплопровідності*

$$u_t = \Delta u, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad u|_{t=0} = g(x)$$

також розв'язують за допомогою формули Пуассона, що у багатовимірному випадку набуває вигляду

$$u(t, x) = \frac{1}{(4\pi t)^{\frac{n}{2}}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{|x-\xi|^2}{4t}} g(\xi) dV_\xi. \quad (5.8)$$

Приклад 14. Застосувавши формулу Пуассона, знайти розв'язок задачі Коші для рівняння теплопровідності $u_t = u_{xx}$ за умови $u|_{t=0} = e^{-x^2+x}$.

Розв'язання. Формула Пуассона (5.7) для рівняння теплопровідності в загальному випадку

$$u_t = a^2 u_{xx}, \quad u|_{t=0} = g(x) = e^{-\alpha x^2 + \beta x}$$

має вигляд

$$u(x, t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi a^2 t}} \int_{-\infty}^{\infty} g(\eta) e^{-\frac{(x-\eta)^2}{4a^2 t}} d\eta = \frac{1}{2\sqrt{\pi a^2 t}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(x-\eta)^2}{4a^2 t}} e^{-\alpha \eta^2 + \beta \eta} d\eta. \quad (5.9)$$

Після заміни $y = \frac{\eta - x}{2\sqrt{a^2 t}} \Rightarrow \eta = 2y\sqrt{a^2 t} + x$, $d\eta = 2\sqrt{a^2 t} dy$ вираз (5.9) набуде вигляду

$$u(x, t) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2 - \alpha(2y\sqrt{a^2 t} + x)^2 + \beta(2y\sqrt{a^2 t} + x)} dy. \quad (5.10)$$

Виділимо повний квадрат у показнику експоненційної функції:

$$\begin{aligned}
& -y^2 - \alpha \left(2y\sqrt{a^2t} + x\right)^2 + \beta \left(2y\sqrt{a^2t} + x\right) = \\
& = - (1 + 4\alpha a^2t) y^2 - (4\alpha x - 2\beta) \sqrt{a^2t} y - \alpha x^2 + \beta x = \\
& = - \left(\sqrt{1 + 4\alpha a^2t} y\right)^2 - 2(2\alpha x - \beta) \sqrt{a^2t} y \frac{\sqrt{1 + 4\alpha a^2t}}{\sqrt{1 + 4\alpha a^2t}} - \\
& - \left(\frac{(2\alpha x - \beta) \sqrt{a^2t}}{\sqrt{1 + 4\alpha a^2t}}\right)^2 + \left(\frac{(2\alpha x - \beta) \sqrt{a^2t}}{\sqrt{1 + 4\alpha a^2t}}\right)^2 - \alpha x^2 + \beta x = \\
& = - \left(\sqrt{1 + 4\alpha a^2t} y + \frac{(2\alpha x - \beta) \sqrt{a^2t}}{\sqrt{1 + 4\alpha a^2t}}\right)^2 + \left(\frac{(2\alpha x - \beta) \sqrt{a^2t}}{\sqrt{1 + 4\alpha a^2t}}\right)^2 - \alpha x^2 + \beta x = \\
& = -z^2 + \underbrace{\left(\frac{(2\alpha x - \beta) \sqrt{a^2t}}{\sqrt{1 + 4\alpha a^2t}}\right)^2}_{\gamma=\text{const}} - \alpha x^2 + \beta x, \quad dz = \sqrt{1 + 4\alpha a^2t} dy.
\end{aligned}$$

З урахуванням нових перетворень інтеграл Пуассона (5.10) набуде вигляду

$$u(x, t) = \frac{1}{\sqrt{1 + 4\alpha a^2t}\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-z^2 + \gamma} dz = \frac{e^\gamma}{\sqrt{1 + 4\alpha a^2t}\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-z^2} dz.$$

Очевидно, що після перетворень матимемо Гауссів інтеграл, значення якого дорівнює $\sqrt{\pi}$. Остаточно, підставивши $a = \alpha = \beta = 1$, одержимо розв'язок вихідного рівняння у вигляді

$$u(x, t) = \frac{1}{\sqrt{1 + 4t}} e^{\frac{(2x-1)^2 t}{1+4t} - x^2 + x}.$$

Завдання для самостійного виконання

Застосувавши формулу Пуассона, знайти розв'язки задач Коші для рівнянь теплопровідності:

$$5.1. u_t = 3u_{xx}, \quad u|_{t=0} = e^{-2x^2}. \quad 5.4. 4u_t = u_{xx}, \quad u|_{t=0} = e^{-2x-x^2}.$$

$$5.2. u_t = 16u_{xx}, \quad u|_{t=0} = e^{-x^2-3x}. \quad 5.5. u_t = u_{xx}, \quad u|_{t=0} = xe^{-x^2}.$$

$$5.3. u_t = 25u_{xx}, \quad u|_{t=0} = e^{2x^2+5x}. \quad 5.6. 4u_t = u_{xx}, \quad u|_{t=0} = \sin xe^{-x^2}.$$

5.2. Застосування методу Фур'є для одновимірного рівняння теплопровідності

Розглянемо застосування методу Фур'є до рівняння теплопровідності:

$$\begin{cases} u_t = u_{xx}, & 0 \leq x \leq l, \quad 0 < t < \infty, \\ u(t, 0) = u(t, l) = 0, & u(0, x) = \varphi(x). \end{cases} \quad (5.11)$$

Шукаючи розв'язок у вигляді $u = h(t)y(x)$, отримаємо розділення змінних

$$\frac{\dot{h}(t)}{h(t)} = \frac{y''(x)}{y(x)} = -\lambda,$$

звідки виходить уже відома нам спектральна задача для $y(x)$ (3.13), розв'язок якої має вигляд

$$\lambda_n = \frac{\pi^2 n^2}{l^2}, \quad y_n = \sin \frac{\pi n x}{l},$$

і «супровідне» у цій задачі рівняння для h :

$$\dot{h} = \lambda h,$$

розв'язком якого є $h_n = e^{-\frac{\pi^2 n^2 a^2}{l^2} t}$. Тому в результаті отримаємо зображення розв'язку диференціального рівняння (5.11) у вигляді

$$u(t, x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{-\frac{\pi^2 n^2 a^2}{l^2} t} \sin \frac{\pi n x}{l}.$$

Підставивши такий розв'язок у початкові умови, одержимо

$$\varphi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \sin \frac{\pi n x}{l},$$

звідки C_n визначимо саме формулами Фур'є:

$$C_n = \frac{2}{l} \int_0^l \varphi(x) \sin \frac{\pi n x}{l} dx. \quad (5.12)$$

Залишилося з'ясувати зв'язок між отриманим зображенням розв'язку у вигляді ряду й отриманим раніше за допомогою формули Пуассона (5.7). Для цього підставимо значення (5.12) у формулу для $u(t, x)$. Одержимо

$$u(t, x) = \frac{2}{l} \int_0^l \left[\sum_{n=1}^{\infty} e^{-\frac{\pi^2 n^2 a^2}{l^2} t} \sin \frac{\pi n x}{l} \sin \frac{\pi n \xi}{l} \right] \varphi(\xi) d\xi. \quad (5.13)$$

Вираз аналогічний формулі Пуассона: розв'язок подано інтегралом від початкової умови, помноженим на деяке «ядро» — множник, що залежить від t, x, s . Підінтегральну функцію

$$G(x, \xi, t) = \frac{2}{l} \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\frac{\pi^2 n^2 a^2}{l^2} t} \sin \frac{\pi n x}{l} \sin \frac{\pi n \xi}{l} \quad (5.14)$$

називають **функцією миттєвого точкового джерела**. Фізичний зміст функції $G(x, \xi, t)$ полягає в тому, що вона як функція аргументу x являє собою розподіл температури у стрижні в момент часу t , якщо за $t = 0$ температура дорівнювала нулю, і в цей момент у точці $x = \xi$ миттєво виділилася деяка кількість тепла Q , а на кінцях стрижня постійно підтримується нульова температура. Щоправда, у формулі Пуассона інтеграл був за всією віссю, а для задачі на відрізку було потрібно продовжувати початкову умову непарним періодичним способом. Приведемо це зображення до інтеграла за $[0, l]$. Для цього розіб'ємо вісь на відрізки довжиною l і на кожному відрізку замінимо змінну так, щоб інтегровальна функція виявилася рівною $\varphi(s)$:

$$\begin{aligned} u(t, x) &= \frac{1}{\sqrt{4\pi at}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(x-s)^2}{4a^2 t}} \tilde{\varphi}(s) ds = \frac{1}{\sqrt{4\pi at}} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \int_{2kl}^{(2k+1)l} e^{-\frac{(x-s)^2}{4a^2 t}} \tilde{\varphi}(s) ds + \\ &+ \frac{1}{\sqrt{4\pi at}} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \int_{2kl}^{(2k+1)l} e^{-\frac{(x-s)^2}{4a^2 t}} \tilde{\varphi}(s) ds = \frac{1}{\sqrt{4\pi at}} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \int_0^l e^{-\frac{(x-\xi-2kl)^2}{4a^2 t}} \tilde{\varphi}(\xi + 2kl) d\xi + \\ &+ \frac{1}{\sqrt{4\pi at}} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \int_0^l e^{-\frac{(x-\xi-2(k+1)l)^2}{4a^2 t}} \tilde{\varphi}(\xi + 2(k+1)l) d\xi. \end{aligned}$$

Скориставшись тим, що $\tilde{\varphi}((\xi + 2k)l - \xi) = \varphi(\xi)$, і замінивши у другій сумі $k + 1$ на k , одержимо

$$u(t, x) = \frac{1}{\sqrt{4\pi at}} \int_0^l \left[\sum_{k=-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(x-\xi-2(k+1)l)^2}{4a^2 t}} - e^{-\frac{(x+\xi-2kl)^2}{4a^2 t}} \right] \varphi(\xi) d\xi. \quad (5.15)$$

Тепер покажемо, що (5.13) і (5.15) — один і той самий розв'язок, тобто

$$\frac{2}{l} \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\frac{\pi^2 n^2 a^2}{l^2} t} \sin \frac{\pi n x}{l} \sin \frac{\pi n s}{l} = \frac{1}{\sqrt{4\pi at}} \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(x-s-2kl)^2}{4a^2 t}} - e^{-\frac{(x+s-2kl)^2}{4a^2 t}}.$$

На перший погляд, це зовсім неочевидно: ліворуч і праворуч розташовані зовсім різні вирази, однак помітимо, що

$$2 \sin \frac{\pi n x}{l} \sin \frac{\pi n s}{l} = \cos \frac{\pi n (x - s)}{l} - \cos \frac{\pi n (x + s)}{l},$$

тому рівність можна записати у простішому вигляді:

$$\frac{1}{l} \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\frac{\pi^2 n^2 a^2}{l^2} t} \cos \frac{\pi n \xi}{l} = \frac{1}{\sqrt{4\pi a t}} \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(\xi - 2kl)^2}{4a^2 t}}.$$

Для доведення цієї рівності можемо скористатися відомим із функціонального аналізу фактом, що будь-які дві неперервні функції, які мають однакові коефіцієнти Фур'є за тригонометричною системою, повинні збігатися. Оскільки й ліворуч, і праворуч розташовані парні за ξ функції, достатньо помножити обидві частини на $\cos \frac{\pi m \xi}{l}$, проінтегрувати та порівняти результат. Ліворуч одержимо

$$\begin{aligned} \frac{1}{l} \int_0^l \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\frac{\pi^2 n^2 a^2}{l^2} t} \cos \frac{\pi n \xi}{l} \cos \frac{\pi m \xi}{l} d\xi &= \frac{1}{2} e^{-\frac{\pi^2 n^2 a^2}{l^2} t} = \\ &= \frac{1}{\sqrt{4\pi a^2 t}} \int_0^l \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(\xi - 2kl)^2}{4a^2 t}} \cos \frac{\pi m \xi}{l} d\xi = \\ &= \frac{1}{\sqrt{4\pi a^2 t}} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \int_{2kl}^{(2k+1)l} e^{-\frac{\xi^2}{4a^2 t}} \cos \frac{\pi m \xi}{l} d\xi = \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{4\pi a^2 t}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{\xi^2}{4a^2 t}} \cos \frac{\pi m \xi}{l} d\xi. \end{aligned}$$

Ця формула, як чітко видно, збігається з формулою для розв'язку рівняння (5.1), що задовольняє умову $u(0, x) = \frac{1}{2} \cos \frac{\pi m s}{l}$. Таким розв'язком є, як легко перевірити, функція

$$u(t, x) = \frac{1}{2} e^{-\frac{\pi^2 n^2 a^2}{l^2} t} \cos \frac{\pi m s}{l}.$$

Цей розв'язок обчислимо за $x = 0$. Отже, дві різні функції (5.13) і (5.15) виявилися збіжними, тому наведені формули дають різні зображення того самого розв'язку.

Приклад 15. Знайти розв'язок змішаної задачі для рівняння тепло-
провідності на відрізку

$$\begin{cases} u_t = 16U_{xx}, & 0 < x < 3, \quad t > 0; \\ u(0, t) = u(3, t) = 0, & u(x, 0) = \begin{cases} x^2/3, & 0 \leq x \leq 3/2, \\ 3 - x, & 3/2 \leq x \leq 3. \end{cases} \end{cases}$$

Розв'язання. Шукатимемо розв'язки у вигляді

$$u(x, t) = X(x) T(t). \quad (5.16)$$

Підставивши (5.16) у вихідне рівняння й розділивши змінні, одержимо

$$X''(x) + \lambda^2 X(x) = 0, \quad \dot{T}(t) + 16\lambda^2 T(t) = 0.$$

Для координатної функції матимемо

$$X(x) = C_1 \cos \lambda x + C_2 \sin \lambda x, \quad X(0) = X(3) = 0.$$

Підставивши крайові умови, одержимо

$$X(0) = C_1 = 0; \quad X(3) = C_2 \sin 3\lambda = 0 \Rightarrow \lambda = \frac{\pi k}{3}.$$

Отже,

$$X_k(x) = \sin \frac{\pi k}{3} x, \quad k = 1, 2, \dots \quad (5.17)$$

Аналогічно для часової функції

$$T_k(t) = A_k e^{-\frac{16\pi^2 k^2}{9} t}. \quad (5.18)$$

Із (5.17) і (5.18) одержимо

$$u(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} A_k e^{-\frac{16\pi^2 k^2}{9} t} \sin \frac{\pi k}{3} x. \quad (5.19)$$

Скористаємося початковою умовою, що залишилася:

$$u(x, 0) = \sum_{k=1}^{\infty} A_k \sin \frac{\pi k}{3} x = \begin{cases} x^2/3, & 0 \leq x \leq 3/2, \\ 3 - x, & 3/2 \leq x \leq 3. \end{cases}$$

Звідси

$$A_k = \frac{2}{3} \left(\frac{1}{3} \int_0^{3/2} x^2 \sin \frac{\pi k}{3} x dx + \int_{3/2}^3 (3-x) \sin \frac{\pi k}{3} x dx \right) =$$

$$= \frac{3 \left((k^2 \pi^2 + 8) \cos \frac{k\pi}{2} + 8k\pi \sin \frac{k\pi}{2} - 8 \right)}{2k^3 \pi^3}.$$

Остаточно

$$u(x, t) = \frac{3}{2\pi^3} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(k^2 \pi^2 + 8) \cos \frac{k\pi}{2} + 8k\pi \sin \frac{k\pi}{2} - 8}{k^3} e^{-\frac{16\pi^2 k^2}{9} t} \sin \frac{\pi k}{3} x.$$

Завдання для самостійного виконання

Знайти розв'язки змішаних задач для рівнянь теплопровідності на відрізьку:

$$5.7. \begin{cases} u_t = 3u_{xx}, \\ u(x, 0) = 2 \sin 2\pi x, \quad u(0, t) = 0, \quad u(7, t) = 0. \end{cases}$$

$$5.8. \begin{cases} u_t = 9u_{xx}, \\ u(x, 0) = 2 \sin 2\pi x + 3 \sin 3\pi x, \quad u(0, t) = 0, \quad u(1, t) = 0. \end{cases}$$

$$5.9. \begin{cases} u_t = 3u_{xx}, \\ u(x, 0) = 3 \cos 3\pi x + 4 \cos 4\pi x, \quad u_x(0, t) = 0, \quad u_x(2, t) = 0. \end{cases}$$

Приклад 16. Знайти розв'язок змішаної задачі для рівняння теплопровідності у колі:

$$\begin{cases} u_t = 16\Delta u, & 0 \leq r < 5, \quad t > 0; \\ u(r, 0) = 25 - r^2, & u(5, t) = 0. \end{cases}$$

Розв'язання. Розглядатимемо рівняння у полярних координатах. Оскільки ані коефіцієнти рівняння, ані крайові умови не залежать від полярного кута, то не залежить від нього і сам розв'язок. Шукатимемо розв'язок у вигляді

$$u(r, \varphi, t) \equiv U(r, t) = R(r) T(t). \quad (5.20)$$

Підставивши (5.20) у вихідне рівняння, матимемо

$$\frac{R''(r)}{R(r)} + \frac{1}{r} \frac{R'(r)}{R(r)} = \frac{1}{16} \frac{\dot{T}(t)}{T(t)},$$

звідки

$$rR''(r) + R'(r) + \lambda rR(r) = 0, \quad (5.21-a)$$

$$\dot{T}(t) + 16\lambda T(t) = 0. \quad (5.21-б)$$

Рівняння (5.21-а) — окремий випадок рівняння Бесселя, тому воно має розв'язок

$$R(r) = C_1 J_0(\sqrt{\lambda}r) + C_2 N_0(\sqrt{\lambda}r),$$

де J_0 і N_0 — функції Бесселя й Неймана нульового порядку відповідно (див. розділ 7.6.). Наклавши обмеження $|R(0)| < \infty$, одержимо умову $C_2 \equiv 0$. Крайова умова $R(5) = 0$ дає $C_1 J_0(5\sqrt{\lambda}) = 0$, звідки

$$\lambda_k = \frac{\mathbf{v}_k^2}{25}, k = 1, 2, \dots, \quad (5.22)$$

де $\mathbf{v}_k$ — k -й нуль функції Бесселя нульового порядку. Відповідно,

$$R_k(r) = C_k J_0\left(\mathbf{v}_k \frac{r}{5}\right). \quad (5.23)$$

Перейдемо до знаходження часової функції. З урахуванням (5.22) (5.21-б) запишемо у вигляді

$$\dot{T}_k(t) + \frac{16}{25}\mathbf{v}_k T_k(t) = 0,$$

звідки

$$T_k(t) = D_k e^{-\frac{16}{25}\mathbf{v}_k t}. \quad (5.24)$$

Поєднавши (5.20), (5.23) і (5.24), матимемо

$$u(r, t) = \sum_{k=1}^{\infty} A_k e^{-\frac{16}{25}\mathbf{v}_k t} J_0\left(\mathbf{v}_k \frac{r}{5}\right). \quad (5.25)$$

Скористаємося початковою умовою:

$$U(r, 0) = \sum_{k=1}^{\infty} A_k J_0\left(\mathbf{v}_k \frac{r}{5}\right) = 25 - r^2,$$

звідки

$$A_k = \frac{50}{J_1^2(\mathbf{v}_k)} \int_0^5 \left[1 - \left(\frac{r}{5}\right)^2\right] J_0\left(\mathbf{v}_k \frac{r}{5}\right) \frac{r}{5} d\left(\frac{r}{5}\right) = \frac{100 J_2(\mathbf{v}_k)}{\mathbf{v}_k^2 J_1^2(\mathbf{v}_k)}.$$

Остаточно

$$u(r, t) = 100 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{J_2(\mathbf{v}_k)}{\mathbf{v}_k^2 J_1^2(\mathbf{v}_k)} e^{-\frac{16}{25}\mathbf{v}_k t} J_0\left(\mathbf{v}_k \frac{r}{5}\right).$$

Завдання для самостійного виконання

Знайти розв'язок змішаних задач для рівняння теплопровідності у колі:

$$5.10. \begin{cases} u_t = \Delta u, & 0 \leq r < 7, \\ u(r, 0) = 49 - r^2, & u(7, t) = 0. \end{cases} \quad 5.11. \begin{cases} u_t = 25\Delta u, & 0 \leq r < 3, \\ u(r, 0) = 9 - r^2, & u(3, t) = 0. \end{cases}$$

5.3. Метод Фур'є для неоднорідних рівнянь теплопровідності

Загальний випадок неоднорідного рівняння. Розглянемо в одновимірному випадку неоднорідне рівняння теплопровідності:

$$\begin{cases} u_t = a^2 u_{xx} + f(t, x), & 0 \leq x \leq l, \quad t > 0; \\ u|_{t=0} = u_0(x), \quad u(t, 0) = u(t, l) = 0. \end{cases} \quad (5.26)$$

Загальний розв'язок однорідного рівняння має вигляд

$$u_{\text{одн}} = \sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{\pi n x}{l} C_n e^{-\frac{\pi^2 n^2 a^2}{l^2} t}. \quad (5.27)$$

У найпростішому випадку, якщо права частина дорівнює

$$f(t, x) = \sin \frac{\pi m x}{l},$$

то розв'язок природно шукати у вигляді

$$u(t, x) = C \sin \frac{\pi m x}{l}.$$

Підставивши цю функцію в рівняння теплопровідності, отримаємо

$$-a^2 C \frac{\pi^2 m^2}{l^2} \sin \frac{\pi m x}{l} + \sin \frac{\pi m x}{l} = 0,$$

звідки $C = \frac{a^2 l^2}{\pi^2 m^2}$.

Якщо ж права частина має вигляд

$$f(t, x) = f_1(t) \sin \frac{\pi m_1 x}{l} + \dots + f_k(t) \sin \frac{\pi m_k x}{l}, \quad (5.28)$$

то можна скористатися *принципом суперпозиції*, знайшовши розв'язок окремо для кожного доданка правої частини і склавши їх разом.

Якщо $f_j(t)$ в (5.28) — сталі, то це найпростіший випадок. Якщо права частина має вигляд $f(t) \sin \frac{\pi m x}{l}$, то розв'язок, звичайно, слід шукати у вигляді

$$u(t, x) = h(t) \sin \frac{\pi m x}{l}.$$

Підставивши, наприклад, у рівняння теплопровідності (5.26), одержимо

$$\dot{h} \sin \frac{\pi m x}{l} = -a^2 h^2 \frac{\pi^2 m^2}{l^2} \sin \frac{\pi m x}{l} + f(t) \sin \frac{\pi m x}{l},$$

звідки

$$\dot{h} = -a^2 h^2 \frac{\pi^2 m^2}{l^2} + f(t).$$

Отже, і у разі, якщо коефіцієнт при синусі залежить від t , ми можемо природно підібрати розв'язки. Однак якщо $f(t, x)$ не розвинена за синусами *a priori*, то для знаходження $f_i(t)$ нам доведеться знову застосувати прийом Фур'є — помножити $f(t, x)$ на $\sin \frac{\pi m_j x}{l}$:

$$\frac{2}{l} \int_0^l f(t, x) \sin \frac{\pi m_j x}{l} dx = f_j(t).$$

Помноживши на синус і проінтегрувавши рівняння цілком, одержимо

$$\underbrace{\frac{2}{l} \int_0^l u_t \sin \frac{\pi m x}{l} dx}_{\dot{u}_m} = \frac{2}{l} a^2 \int_0^l u_{xx} \sin \frac{\pi m x}{l} dx + \underbrace{\frac{2}{l} \int_0^l f(t, s) \sin \frac{\pi m x}{l} dx}_{f_m(t)}, \quad (5.29)$$

якщо позначити

$$\frac{2}{l} \int_0^l u(t, x) \sin \frac{\pi m x}{l} dx = u_m(t). \quad (5.30)$$

Проінтегрувавши доданок з (5.29) частинами, одержимо

$$\begin{aligned} \int_0^l u_{xx} \sin \frac{\pi m x}{l} dx &= \int_0^l d(u_x) \sin \frac{\pi m x}{l} dx = u_x \sin \frac{\pi m x}{l} \Big|_0^l - \frac{\pi m}{l} \int_0^l u_x \cos \frac{\pi m x}{l} dx = \\ &= -\frac{\pi m}{l} \int_0^l \cos \frac{\pi m x}{l} du = -\frac{\pi m u}{l} \cos \frac{\pi m x}{l} \Big|_0^l - \frac{\pi^2 m^2}{l^2} \int_0^l u \sin \frac{\pi m x}{l} dx = -\frac{\pi^2 m^2}{l^2} u_m(t). \end{aligned}$$

Отже, рівняння (5.29) набуде вигляду

$$\dot{u}_m = -\frac{\pi^2 m^2}{l^2} a^2 u_m(t) + f_m(t), \quad (5.31)$$

тобто, отримаємо такий самий результат, що й у разі «підстановки».

Частинний розв'язок неоднорідного рівняння має вигляд

$$u_{\text{чн}} = \sum_{m=1}^{\infty} u_{m,\text{чн}}(t) \sin \frac{\pi m x}{l},$$

де $u_{m,\text{чн}}(t)$ — частинний розв'язок рівняння (5.31).

З урахуванням загального розв'язку однорідного (5.27) загальний розв'язок неоднорідного рівняння набуде вигляду

$$u_{\text{вн}} = \sum_{m=1}^{\infty} \left(C_m e^{-\frac{\pi^2 m^2 a^2}{l^2} t} + u_{m,\text{чн}} \right) \sin \frac{\pi m x}{l}. \quad (5.32)$$

Зауважимо, що в дужках розташований загальний розв'язок рівняння (5.31). Отже, знайшовши функції, на які потрібно множити, ми можемо не шукати загальний розв'язок однорідного рівняння.

Якщо задано початкову умову $u(0, x) = u_0(x)$, то (5.30) за $t = 0$ дасть початкову умову для $u_m(t)$:

$$u_m(0) = \frac{2}{l} \int_0^l u_0(x) \sin \frac{\pi m x}{l} dx,$$

що дозволить знайти конкретні функції $u_m(t)$, а за ними — і відповідний розв'язок рівняння теплопровідності.

Випадок неоднорідних крайових умов. Якщо в задачі (5.26) задано неоднорідні крайові умови

$$u(t, 0) = \lambda(t), \quad u(t, l) = \mu(t), \quad (5.33)$$

то необхідно позбутися неоднорідності, зобразивши $u(t, x)$ як суму функцій, одна з яких задовольняє ці крайові умови. Тоді для другої функції вони будуть нульовими. Наприклад,

$$u(t, x) = V(t, x) + \lambda(t) \frac{l-x}{l} + \mu(t) \frac{x}{l},$$

тоді $V(t, 0) = V(t, l) = 0$, а рівняння задачі (5.26) набуде вигляду

$$V_t + \dot{\lambda} \frac{l-x}{l} + \dot{\mu} \frac{x}{l} = a^2 V_{xx} + f(t, x).$$

Отже, задачу можна звести до задачі з однорідними крайовими умовами

$$\begin{cases} V_t = a^2 V_{xx} + \left[f(t, x) - \dot{\lambda} \frac{l-x}{l} - \dot{\mu} \frac{x}{l} \right], \\ V|_{t=0} = u_0(x) - \lambda(t) \frac{l-x}{l} - \mu(t) \frac{x}{l}, \\ V|_{x=0} = V|_{x=l} = 0. \end{cases} \quad (5.34)$$

Приклад 17. Знайти розв'язок змішаної задачі для рівняння теплопровідності на відрізку

$$\begin{cases} u_t = 9u_{xx}, & 0 < x < 2, \quad t > 0; \\ u(0, t) = -1, \quad u(2, t) = 5, & u(x, 0) = 5 \sin 2\pi x + 3x - 1. \end{cases}$$

Розв'язання. Введемо нову функцію $w(x, t) = u(x, t) + \gamma_1 x + \gamma_2$. Доберемо коефіцієнти γ_1, γ_2 так, щоб рівняння $w_t = 9w_{xx}$ мало нульові крайові умови:

$$\begin{cases} w(0, t) = -1 + \gamma_1 \cdot 0 + \gamma_2 = 0 \\ w(2, t) = 5 + \gamma_1 \cdot 2 + \gamma_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \gamma_1 = -3, \gamma_2 = 1 \Rightarrow w(x, t) = u(x, t) - 3x + 1.$$

Розв'язок однорідної змішаної задачі для функції $w = w(x, t)$ з нульовими крайовими умовами шукатимемо аналогічно прикладу 15:

$$\begin{cases} w_t = 9w_{xx} \\ w(x, 0) = 5 \sin 2\pi x \\ w(0, t) = 0, w(2, t) = 0 \end{cases} \Rightarrow w(x, t) = 5e^{-36\pi^2 t} \sin 2\pi x.$$

Отже, розв'язок вихідної задачі набуде вигляду

$$u(x, t) = 5e^{-36\pi^2 t} \sin 2\pi x + 3x - 1.$$

Приклад 18. Знайти розв'язок змішаної задачі для рівняння теплопровідності на відрізку

$$\begin{cases} u_t = \frac{1}{4}u_{xx} + 5 \cos 2t \sin 2x, & 0 < x < \pi, \quad t > 0; \\ u(0, t) = u(\pi, t) = 0, & u(x, 0) = \sin 4x. \end{cases}$$

Розв'язання. Зобразимо розв'язок у вигляді суми двох функцій $u(x, t) = v(x, t) + w(x, t)$, одна з яких задовольняє однорідне рівняння з неоднорідними початковими умовами, а інша — неоднорідне рівняння з нульовими початковими умовами:

$$\begin{cases} v_t = \frac{1}{4}v_{xx}, \\ v(x, 0) = \sin 4x, \\ v(0, t) = 0, v(\pi, t) = 0, \end{cases} \quad \begin{cases} w_t = \frac{1}{4}w_{xx} + 5 \cos 2t \sin 2x, \\ w(x, 0) = 0, \\ w(0, t) = 0, w(\pi, t) = 0. \end{cases}$$

Функцію $v(x, t)$ знайдемо за аналогією із прикладом 15:

$$v(x, t) = e^{-4t} \sin 4x.$$

Шукану функцію $w(x, t)$ зобразимо у вигляді

$$w(x, t) = \sum_n w_n(t) \sin(nx).$$

Підставивши останню функцію в рівняння для $w(x, t)$, отримаємо

$$\sum_n \left(\frac{dw_n}{dt} + \frac{n^2}{4}w_n \right) \sin(nx) = f(x, t) \Rightarrow \sum_n f_n(t) \sin(nx) = 5 \cos 2t \sin 2x,$$

$$\forall n \neq 2 : f_n = 0, f_2 = 5 \cos 2t.$$

$$\frac{dw_2}{dt} + w_2 = 5 \cos 2t \Rightarrow w_2 = Ce^{-t} + \cos 2t + 2 \sin 2t.$$

З урахуванням умови $w_2(0) = 0$ одержимо, що $w_2 = -e^{-t} + \cos 2t + 2 \sin 2t$.
У результаті

$$w(x, t) = (-e^{-t} + \cos 2t + 2 \sin 2t) \sin 2x.$$

Отже, розв'язок рівняння набуде вигляду

$$u(x, t) = e^{-4t} \sin 4x + (-e^{-t} + \cos 2t + 2 \sin 2t) \sin 2x.$$

Приклад 19. Знайти розв'язок змішаної неоднорідної задачі для рівняння теплопровідності на відрізку:

$$\begin{cases} u_t = \frac{1}{36}u_{xx} + 5 \sin 2t \sin 6x, & 0 < x < \pi, t > 0; \\ u(0, t) = \pi, u(\pi, t) = 4\pi, & u(x, 0) = \sin 12x + 3x + \pi. \end{cases}$$

Розв'язання. Аналогічно розв'язку завдання 18, шукатимемо розв'язок у вигляді суми двох функцій: $u(x, t) = v(x, t) + w(x, t)$.

$$\begin{cases} v_t = \frac{1}{36}v_{xx}, \\ v(x, 0) = \sin 12x + 3x + \pi, \\ v(0, t) = \pi, v(\pi, t) = 4\pi, \end{cases} \quad \begin{cases} w_t = \frac{1}{36}w_{xx} + 5 \sin 2t \sin 6x, \\ w(x, 0) = 0, \\ w(0, t) = 0, w(\pi, t) = 0. \end{cases}$$

Щоб знайти функцію $v(x, t)$, перейдемо до нової функції $g(x, t) = v(x, t) + \gamma_1 x + \gamma_2$, для якої крайові умови дорівнюватимуть нулю. Аналогічно до прикладу 17

$$\begin{cases} g_t = \frac{1}{36}g_{xx}, \\ g(x, 0) = \sin 12x, \\ g(0, t) = 0, g(\pi, t) = 0, \end{cases} \Rightarrow \gamma_1 = -3, \gamma_2 = -\pi.$$

Функцію $g(x, t)$ знайдемо за аналогією із прикладом 15:

$$g(x, t) = e^{-4t} \sin 12x, \Rightarrow v(x, t) = e^{-4t} \sin 12x + 3x + \pi.$$

Функцію $w(x, t)$ знайдемо аналогічно до прикладу 18:

$$w(x, t) = (2e^{-t} + \sin 2t - 2 \cos 2t) \sin 6x.$$

Остаточний розв'язок запропонованої задачі запишемо у вигляді

$$u(x, t) = e^{-4t} \sin 12x + 3x + \pi + (2e^{-t} + \sin 2t - 2 \cos 2t) \sin 6x.$$

Приклад 20. Знайти розв'язок змішаної неоднорідної задачі для рівняння теплопровідності на відрізку

$$\begin{cases} u_t - u_{xx} + 2u_x - U = e^x \sin x - t, & 0 < x < \pi, t > 0; \\ u(0, t) = u(\pi, t) = 1 + t, & u(x, 0) = 1 + e^x \sin 2x. \end{cases}$$

Розв'язання. Здійснивши заміну $u(x, t) = g(x, t) + 1 + t$, отримаємо задачу вигляду

$$\begin{cases} g_t - g_{xx} + 2g_x - g = e^x \sin x; \\ g(0, t) = g(\pi, t) = 0, & g(x, 0) = e^x \sin 2x. \end{cases}$$

Якщо провести заміну $g(x, t) = v(x, t) + w(x)$, то задача розпадеться на дві системи:

$$\begin{cases} v_t - v_{xx} + 2v_x - v = 0, \\ v(x, 0) = e^x \sin 2x - w(x), \\ v(0, t) = v(\pi, t) = 0, \end{cases} \quad \begin{cases} -w_{xx} + 2w_x - w = e^x \sin x, \\ w(0) = w(\pi) = 0. \end{cases}$$

Розв'язком другої системи буде функція $w(x) = e^x \sin x$. Підставимо її у першу систему:

$$\begin{cases} v_t - v_{xx} + 2v_x - v = 0, \\ v(x, 0) = e^x \sin 2x - e^x \sin x \quad v(0, t) = v(\pi, t) = 0. \end{cases}$$

Знайдемо розв'язок для функції v , розділивши змінні $v(x, t) = R(x)T(t)$:

$$RT' - R'' + 2R' - RT = 0,$$

$$\frac{T'}{T} = \frac{R'' - 2R' + R}{R} = -\lambda^2 \Rightarrow \begin{cases} T' + \lambda^2 T = 0, \\ R'' - 2R' + (1 + \lambda^2) R = 0. \end{cases}$$

Розв'язки цих диференціальних рівнянь у загальному випадку матимуть вигляд

$$\begin{cases} T(t) = Ce^{-\lambda^2 t}, \\ R(x) = e^x (A \cos \lambda x + B \sin \lambda x), \end{cases}$$

$$v(x, t) = e^{-\lambda^2 t} e^x (A_k \cos \lambda x + B_k \sin \lambda x), \quad A_k = AC, \quad B_k = BC.$$

Застосуємо крайові умови:

$$v(0, t) = e^{-\lambda^2 t} A_k = 0 \Rightarrow A_k = 0,$$

$$v(\pi, t) = e^{-\lambda^2 t} e^\pi B_k \sin \lambda \pi = 0 \Rightarrow \lambda = k,$$

$$v(x, t) = \sum_{k=0}^{\infty} e^{-k^2 t} e^x B_k \sin kx.$$

Скористаємося початковою умовою

$$v(x, 0) = \sum_{k=0}^{\infty} e^x B_k \sin kx = e^x \sin 2x - e^x \sin x.$$

$\forall k \neq 1, k \neq 2 : B_k = 0, \quad B_1 = -1, \quad B_2 = 1$. У результаті отримаємо функцію $v(x, t) = e^{x-4t} \sin 2x - e^{x-t} \sin x$. Відтак повернемося до попередніх замін. Остаточно розв'язок вихідної задачі набуде вигляду

$$u(x, t) = e^{x-4t} \sin 2x - e^{x-t} \sin x + e^x \sin x + 1 + t.$$

Завдання для самостійного виконання

Знайти розв'язки змішаних неоднорідних задач для рівняння теплопровідності на відріжку

$$5.12. \begin{cases} u_t = 7u_{xx}, \\ u(x, 0) = 7 \sin 2\pi x - 3 + 4x, \quad u(0, t) = -3, \quad u(1, t) = 1. \end{cases}$$

$$5.13. \begin{cases} u_t = 8u_{xx}, \\ u(x, 0) = 6 \sin 3\pi x + 2 - 3x, \quad u(0, t) = 2, \quad u(3, t) = -7. \end{cases}$$

$$5.14. \begin{cases} u_t = \frac{1}{16}u_{xx} + 10 \cos 3t \sin 4x, \\ u(x, 0) = 3 \sin 16x, \quad u(0, t) = 0, \quad u(\pi, t) = 0. \end{cases}$$

$$5.15. \begin{cases} u_t = \frac{1}{9}u_{xx} + 10 \sin 3t \sin 3x, \\ u(x, 0) = 3 \sin 12x + 2\pi - x, \quad u(0, t) = 2\pi, \quad u(\pi, t) = \pi. \end{cases}$$

$$5.16. \begin{cases} u_t - u_{xx} + 2u_x - u = e^x \sin x - t, \\ u(x, 0) = 1 + e^x \sin(2x), \quad u(0, t) = u(\pi, t) = 1 + t. \end{cases}$$

6. Рівняння для стаціонарних розв'язків динамічних задач

6.1. Рівняння Пуассона

Розглянемо рівняння Пуассона

$$-\Delta u = f(x, y, z) \quad (6.1)$$

і простежимо його зв'язок з «еволюційними» рівняннями

$$u_t = a^2 \Delta u + f(t, x, y, z) \quad \text{і} \quad u_{tt} = a^2 \Delta u + f(t, x, y, z). \quad (6.2)$$

Основна ідея полягає в тому, що розв'язок рівняння Пуассона (6.1) можна інтерпретувати як стаціонарний розв'язок рівнянь (6.2) у разі, якщо $f(t, x, y, z)$ не залежить від t :

$$u_t = a^2 \Delta u + f(x, y, z), \quad u_{tt} = a^2 \Delta u + f(x, y, z).$$

Розв'язки еволюційних рівнянь можна знайти методом розділення змінних $u(t, x, y, z) = h(t) v(x, y, z)$. Підставивши в рівняння (6.2), одержимо

$$\dot{h} = a^2 \lambda h \quad \text{або} \quad \ddot{h} = a^2 \lambda h$$

і спектральну задачу $\Delta v = \lambda v$, яку зазвичай розглядають в області з крайовими умовами (прямокутник, куля). У прямокутнику можна розділити змінні й далі:

$$v(x, y, z) = a(x) b(y) c(z).$$

У кулі це потребує спеціальних заміन змінних, у більш загальній області подальше розділення змінних взагалі важке, але в кожному випадку розв'язок подають у вигляді

$$u(t, x, y, z) = \sum_k h_k(t) v_k(x, y, z),$$

де $v_k(x, y, z)$ — власні функції спектральної задачі $\Delta v_k = \lambda_k v_k$.

Підставивши у будь-яке рівняння (6.2) стаціонарний розв'язок $u(x, y, z)$, що ліквідує похідні за t , помноживши його на власну функцію та проінтегрувавши, одержимо

$$\int_{\Omega} -\Delta u v_k \, d\Omega = \int_{\Omega} f v_k \, d\Omega.$$

Перетворивши за формулою Остроградського–Гаусса ліву частину, отримаємо

$$-\underbrace{\int_{\partial\Omega} \nabla u v_k \, d\Gamma}_{=0} - \underbrace{\int_{\partial\Omega} \nabla v_k u \, d\Gamma}_{=0} + \int_{\Omega} \Delta v_k u \, d\Omega = \int_{\Omega} f v_k \, d\Omega,$$

звідки з огляду на $\Delta v_k = \lambda_k v_k$

$$u = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\int_{\Omega} f v_k \, d\Omega \cdot v_k}{\lambda_k}. \quad (6.3)$$

Отже, ми одержали розв'язку рівняння Пуассона (6.1) за власними функціями оператора Лапласа.

6.2. Метод розділення змінних у випадку двовимірного рівняння Лапласа

В області $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ розглянемо рівняння

$$u_t = \Delta u \quad \text{або} \quad u_{tt} = \Delta u. \quad (6.4)$$

Рівняння Лапласа й Пуассона не потребують задання початкових умов, а типовими крайовими умовами у разі обмеженої області Ω є крайова умова:

умова Діріхле (умова першого роду):

$$u|_{\partial\Omega} = \varphi; \quad (6.5)$$

умова Неймана (умова другого роду):

$$\left. \frac{\partial u}{\partial n} \right|_{\partial\Omega} = \varphi; \quad (6.6)$$

третя крайова умова (умова третього роду):

$$\left(\frac{\partial u}{\partial n} + \gamma u \right) \Big|_{\partial\Omega} = \varphi, \quad (6.7)$$

де γ, φ — функції, задані на $\partial\Omega$.

Розв'язок запишемо у вигляді

$$u(t, x) = h(t) v(x), \quad x \in \Omega. \quad (6.8)$$

Підставивши його у перше рівняння (6.4) (для хвильового рівняння аналогічно), одержимо рівність

$$\dot{h}v = h\Delta v.$$

Звідси отримаємо спектральну задачу

$$\Delta v = \lambda v, \quad (6.9)$$

наприклад, з умовою Діріхле $v|_{\partial\Omega} = 0$, і рівняння

$$\dot{h} = \lambda h.$$

Подальше розділення змінних уже залежатиме від типу області.

6.2.1. Розділення змінних у прямокутнику

Розглянемо випадок двох просторових змінних (x і y) і область Ω у вигляді прямокутника:

$$0 \leq x \leq \alpha, \quad 0 \leq y \leq \beta.$$

Тоді розв'язок $v = v(x, y)$ спектральної задачі (6.9) шукатимемо у вигляді добутку

$$v(x, y) = a(x) b(y), \quad (6.10)$$

що приводить до рівності

$$a''(x)b(y) + a(x)b''(y) = \lambda a(x)b(y) \Rightarrow \frac{a''(x)}{a(x)} + \frac{b''(y)}{b(y)} = \lambda.$$

Із неї випливає, що перший і другий доданки в лівій частині є сталі величини, тобто

$$a''(x) = \mu a(x), \quad b''(y) = \kappa b(y),$$

і при цьому $\lambda = \mu + \kappa$.

Якщо на межі прямокутника задано умову Діріхле (6.5)

$$u|_{x=0} = u|_{x=\alpha} = u|_{y=0} = u|_{y=\beta} = 0,$$

то підставивши у неї $v(x, y)$, отримаємо

$$a(0) = a(\alpha) = 0, \quad b(0) = b(\beta) = 0.$$

У такий спосіб одержимо для a і b спектральні задачі, розв'язки яких відомі:

$$a_n(x) = \sin \frac{\pi n x}{\alpha}, \quad \mu_n = \frac{\pi^2 n^2}{\alpha^2}, \quad b_m(y) = \sin \frac{\pi m y}{\beta}, \quad \kappa_m = \frac{\pi^2 m^2}{\beta^2}.$$

Отже (тут зручно нумерувати двома індексами: n і m),

$$v_{nm}(x, y) = \sin \frac{\pi n x}{\alpha} \sin \frac{\pi m y}{\beta}, \quad \lambda_{nm} = \pi^2 \left(\frac{n^2}{\alpha^2} + \frac{m^2}{\beta^2} \right)$$

і в результаті

$$u(t, x, y) = \sum_{n,m=1}^{\infty} \sin \frac{\pi n x}{\alpha} \sin \frac{\pi m y}{\beta} C_{n,m} e^{-\pi \left(\frac{n^2}{\alpha^2} + \frac{m^2}{\beta^2} \right) t}. \quad (6.11)$$

6.2.2. Розділення змінних у колі

Одразу розділити змінні для задачі в колі не вдається. Тобто можна зобразити $u(t, x, y) = h(t)v(x, y)$, але для $v(x, y)$ зображення (6.10) не застосовне, тому що підстановка цієї функції, наприклад, в умову Діріхле на колі $x^2 + y^2 = 1$ дасть $h(t)a(x)b(y) = 0$, звідки або $a \equiv 0$, або $b \equiv 0$. Тому нетривіальних розв'язків типу $v(x, y) = a(x)b(y)$ не існує.

Необхідно перейти до полярних координат, у яких коло має вигляд

$$0 \leq r \leq R, \quad 0 \leq \varphi < 2\pi,$$

тобто являє собою прямокутник. З'ясуємо, як перетвориться в цих координатах оператор Лапласа Δu . Перехід до полярних координат визначимо формулами

$$x = r \cos \varphi, \quad y = r \sin \varphi,$$

обернений перехід — формулами

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \varphi = \arctg \frac{y}{x}.$$

Тому в полярних координатах похідні матимуть вигляд

$$u_x = u_r r_x + u_\varphi \varphi_x,$$

де

$$r_x = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{x}{r}, \quad \varphi_x = \frac{1}{1 + \frac{y^2}{x^2}} \left(-\frac{y}{x^2} \right) = -\frac{y}{x^2 + y^2} = -\frac{y}{r^2},$$

звідки

$$\begin{aligned} u_x &= x \left(\frac{1}{r} u_r \right) - y \left(\frac{1}{r^2} u_\varphi \right); \\ u_{xx} &= \frac{1}{r} u_r + x \left(\frac{1}{r} u_r \right)_r \frac{x}{r} - x \left(\frac{1}{r} u_r \right)_\varphi \frac{y}{r^2} - y \left(\frac{1}{r^2} u_\varphi \right)_r \frac{x}{r} + y \left(\frac{1}{r^2} u_\varphi \right)_\varphi \frac{y}{r^2}. \end{aligned}$$

Аналогічно

$$u_y = u_r r_y + u_\varphi \varphi_y,$$

де

$$r_y = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{y}{r}, \quad \varphi_y = \frac{1}{1 + \frac{y^2}{x^2}} \left(\frac{1}{x} \right) = \frac{x}{x^2 + y^2} = \frac{x}{r^2},$$

$$\begin{aligned} u_y &= y \left(\frac{1}{r} u_r \right) + x \left(\frac{1}{r^2} u_\varphi \right); \\ u_{yy} &= \frac{1}{r} u_r + y \left(\frac{1}{r} u_r \right)_r \frac{y}{r} + y \left(\frac{1}{r} u_r \right)_\varphi \frac{x}{r^2} + x \left(\frac{1}{r^2} u_\varphi \right)_r \frac{y}{r} + y \left(\frac{1}{r^2} u_\varphi \right)_\varphi \frac{x}{r^2}. \end{aligned}$$

Отже, оператор Лапласа в полярних координатах має вигляд

$$\begin{aligned} \Delta u &= \frac{2}{r} u_r + r \left(\frac{1}{r} u_r \right)_r + \frac{1}{r^2} u_{\varphi\varphi} = \frac{2}{r} u_r + r \left(-\frac{1}{r^2} u_r + \frac{1}{r} u_{rr} \right) + \frac{1}{r^2} u_{\varphi\varphi} = \\ &= u_{rr} + \frac{1}{r} u_r + \frac{1}{r^2} u_{\varphi\varphi} \quad (6.12) \end{aligned}$$

і рівняння Лапласа в колі набуває форми

$$\begin{cases} u_{rr} + \frac{1}{r}u_r + \frac{1}{r^2}u_{\varphi\varphi} = 0, & r \in [0, R], \quad \varphi \in [0, 2\pi], \\ u|_{r=R} = g(\varphi). \end{cases} \quad (6.13)$$

Шукатимемо розв'язок у вигляді функції $u(r, \varphi) = v(r)q(\varphi)$. Підставивши її в рівняння (6.13), одержимо

$$v''q + \frac{1}{r}v'q + \frac{1}{r^2}vq'' = 0,$$

звідки після ділення на v і q отримаємо

$$\frac{v'' + \frac{1}{r}v'}{v} + \frac{1}{r^2} \frac{q''}{q} = 0.$$

У другому доданку q залежить тільки від φ , тому помножимо рівняння на r^2 , одержавши

$$r^2 \frac{v'' + \frac{1}{r}v'}{v} + \frac{q''}{q} = 0.$$

Тепер ми, як і раніше, маємо два доданки, що залежать від різних змінних — це дає нам два рівняння:

$$q'' = \lambda q, \quad r^2 \left(v'' + \frac{1}{r}v' \right) = -\lambda v. \quad (6.14)$$

Специфіка кола полягає в тому, що $\varphi = 0$ і $\varphi = 2\pi$ — це одна й та сама точка, тому для функції $q(\varphi)$ повинні виконуватись умови періодичності

$$q(0) = q(2\pi), \quad q'(0) = q'(2\pi).$$

Ці умови визначають власні значення першої задачі (6.14):

$$\lambda_n = -n^2, \quad q_n = A_n \cos n\varphi + B \sin n\varphi.$$

Друге рівняння (6.14) за цих значень λ набуде вигляду

$$v'' + \frac{1}{r}v' = \frac{n^2}{r^2}v,$$

або після множення на r^2 :

$$r^2 v'' + r v' - n^2 v = 0, \quad (6.15)$$

одержимо **рівняння Ейлера**. Для нього існує характеристичне рівняння

$$\mu(\mu - 1) + \mu - n^2 = 0, \quad \mu = \pm n,$$

і розв'язок вигляду $y = C_1 x^n + C_2 x^{-n}$. Отже, розв'язок рівняння (6.15) набуде вигляду

$$v(r) = C_1 r^n + C_2 r^{-n},$$

а розв'язок задачі (6.13) —

$$u(r, \varphi) = v(r) q(\varphi).$$

З огляду на припущення про неперервність розв'язку і його диференційовність у колі (у тому числі й у центрі, де $r = 0$) доданки $C_2 r^{-n}$ ми не розглядатимемо. Такий «вибір» стосується тільки даної задачі. Ті самі доданки $C_2 r^{-n}$ мають принципове значення у зовнішніх задачах (коли рівняння $\Delta u = 0$ задано поза колом) — $C_1 r^n$ там не враховують, оскільки передбачено, що на нескінченності $v(r) \rightarrow 0$.

Обидва доданки враховують у кільці (коли рівняння $\Delta u = 0$ задано в кільці $r_0 \leq r \leq r_1$). У цих задачах стосовно малого кола розглядають ніби зовнішню задачу, а стосовно великого — внутрішню.

Отже, розв'язок рівняння розглянутої задачі зобразимо у вигляді

$$u(r, \varphi) = \sum_{n=1}^{\infty} r^n (A_n \cos n\varphi + B \sin n\varphi) + \frac{1}{2} A_0. \quad (6.16)$$

У разі $\lambda = 0$ єдиним періодичним розв'язком рівняння $q'' = 0$ є константа.

Підставивши (6.16) в крайову умову, отримаємо

$$u(R, \varphi) = \sum_{n=1}^{\infty} R^n (A_n \cos n\varphi + B \sin n\varphi) + \frac{1}{2} A_0 = h(\varphi).$$

Ми знову одержали задачу розвинення функції $h(\varphi)$ в ряд Фур'є. Уведемо її в канонічній формі, об'єднавши R^n з коефіцієнтами A_n, B_n :

$$A_n = \frac{\tilde{A}_n}{R^n}, \quad B_n = \frac{\tilde{B}_n}{R^n}.$$

Тоді розв'язок (6.16) подамо у вигляді

$$u(r, \varphi) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{r}{R}\right)^n (\tilde{A}_n \cos n\varphi + \tilde{B}_n \sin n\varphi) + \frac{1}{2} A_0, \quad (6.17)$$

а

$$u(R, \varphi) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\tilde{A}_n \cos n\varphi + \tilde{B}_n \sin n\varphi \right) + \frac{1}{2}A_0 = g(\varphi)$$

є не що інше, як точне розвинення $g(\varphi)$ в ряд Фур'є, коефіцієнти $\tilde{A}_n$ і $\tilde{B}_n$ у якому визначаються формулами

$$\tilde{A}_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} g(\varphi) \cos n\varphi d\varphi, \quad \tilde{B}_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} g(\varphi) \sin n\varphi d\varphi.$$

Підставивши значення цих коефіцієнтів у вираз (6.17), одержимо

$$u(r, \varphi) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} g(\psi) \left(\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{r}{R} \right)^n \cos n(\varphi - \psi) \right) d\psi.$$

Скориставшись формулою Ейлера ($\cos \varphi = \operatorname{Re}(e^{i\varphi})$), запишемо ряд у дужках у вигляді геометричної прогресії:

$$\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{r}{R} \right)^n \cos \varphi = \operatorname{Re} \left[\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{r}{R} \right)^n e^{in\varphi} \right] = \operatorname{Re} \left[\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} z^n \right],$$

де $z = \frac{r}{R} e^{i\varphi}$. Умову $|z| < 1$ вважають виконаною, коли $r < R$. За цієї умови збіжності її підсумовування дає

$$\operatorname{Re} \left[\frac{1}{2} + \frac{z}{1-z} \right] = \frac{R^2 - r^2}{2(R^2 + r^2 - 2rR \cos \varphi)}.$$

Отже, розв'язок задачі Діріхле матиме вигляд формули

$$u(r, \varphi) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{(R^2 - r^2) g(\psi)}{R^2 + r^2 - 2rR \cos(\varphi - \psi)} d\psi, \quad (6.18)$$

яку називають **формулою Пуассона**. Досить примітно, що вона явна і скінченна, але отримана з нескінченного розвинення, яке вдалося підсумувати.

Завдання для самостійного виконання

Знайти розв'язок рівняння Лапласа $\Delta u = 0$ в полярній системі координат ($\alpha < 2\pi$) у круговому секторі $0 \leq r < 1$, $0 < \varphi < \alpha$, на межі якого шукана функція $u(r, \varphi)$ задовольняє такі умови:

$$6.1. u(1, \varphi) = \sin 6\varphi, \quad u(r, 0) = u\left(r, \frac{\pi}{3}\right) = 0.$$

$$6.2. u(1, \varphi) = 2 \cos 2\varphi, \quad u_\varphi(r, 0) = u_\varphi(r, \pi) = 0.$$

$$6.3. u(1, \varphi) = 3 \cos 15\varphi, \quad u_\varphi(r, 0) = u_\varphi\left(r, \frac{\pi}{6}\right) = 0.$$

$$6.4. u(1, \varphi) = \sin \varphi + \cos 2\varphi, \quad u(r, 0) = u\left(r, \frac{\pi}{4}\right) = 0.$$

$$6.5. u(1, \varphi) = 3 \sin 2\varphi - 3 \cos 2\varphi, \quad u_\varphi(r, 0) = u_\varphi\left(r, \frac{3\pi}{4}\right) = 0.$$

Приклад 21. Розв'язати задачу Діріхле для рівняння Лапласа в колі:

$$\begin{cases} \Delta u = 0, & 0 \leq r < 1, \\ u|_{r=1} = \varphi^2 + \varphi + 1. \end{cases}$$

Розв'язання. Перейдемо до сферичних координат. Із урахуванням виразу лапласіана (6.12) запишемо вихідне рівняння у вигляді

$$u_{rr} + \frac{1}{r}u_r + \frac{1}{r^2}u_{\varphi\varphi} = 0. \quad (6.19)$$

Шукатимемо розв'язок у вигляді

$$u(r, \varphi) = R(r) \Phi(\varphi). \quad (6.20)$$

Підставивши (6.20) у (6.19) і розділивши змінні, матимемо

$$\frac{r^2 R''(r)}{R(r)} + \frac{r R'(r)}{R(r)} + \frac{\Phi''(\varphi)}{\Phi(\varphi)} = 0,$$

звідки

$$r^2 R''(r) + r R'(r) - \lambda R(r) = 0, \quad |R(0)| < \infty, \quad (6.21-a)$$

$$\Phi''(\varphi) + \lambda \Phi(\varphi) = 0, \quad \Phi(\varphi + 2\pi) = \Phi(\varphi). \quad (6.21-b)$$

Рівняння (6.21-б) для кутової функції має загальний розв'язок:

$$\Phi(\varphi) = \begin{cases} A_{01} + A_{02}\varphi, & \lambda = 0; \\ A_1 \cos \sqrt{\lambda}\varphi + A_2 \sin \sqrt{\lambda}\varphi. \end{cases}$$

Наклавши умову періодичності, одержимо

$$\begin{cases} A_{02} = 0, \\ \lambda = n^2, \quad n = 1, 2, \dots, \\ \Phi_n(\varphi) = A_{n1} \cos n\varphi + A_{n2} \sin n\varphi. \end{cases} \quad (6.22)$$

Загальний розв'язок для радіальної функції має вигляд

$$R(r) = B_1 r^n + B_2 r^{-n}.$$

Вимога обмеженості $R(r)$ в нулі приводить до умови $B_2 \equiv 0$. Тоді

$$R_n(r) = B_n r^n. \quad (6.23)$$

Поеднавши (6.20), (6.22) і (6.23), знайдемо

$$u(r, \varphi) = C_0 + \sum_{n=1}^{\infty} r^n (C_{n1} \cos n\varphi + C_{n2} \sin n\varphi),$$

де $C_0 = A_{01}$, $C_{n1} = A_{n1} B_n$, $C_{n2} = A_{n2} B_n$.

Скористаємося початковою умовою:

$$u(1, \varphi) = C_0 + \sum_{n=1}^{\infty} C_{n1} \cos n\varphi + C_{n2} \sin n\varphi = \varphi^2 + \varphi + 1,$$

звідки

$$C_0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (\varphi^2 + \varphi + 1) d\varphi = \frac{4}{3}\pi^2 + \pi + 1; \quad C_{n1} = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} (\varphi^2 + \varphi + 1) \cos n\varphi d\varphi = \frac{4}{n^2};$$

$$C_{n2} = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} (\varphi^2 + \varphi + 1) \sin n\varphi d\varphi = -\frac{2(2\pi + 1)}{n}.$$

Отже, остаточно

$$u(r, \varphi) = \frac{4}{3}\pi^2 + \pi + 1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{r^n}{n} \left(\frac{2}{n} \cos n\varphi - (2\pi + 1) \sin n\varphi \right).$$

Завдання для самостійного виконання

У полярній системі координат розв'язати задачу Діріхле для рівняння Лапласа $\Delta u = 0$ у колі $0 \leq r < 1$, $0 \leq \varphi < 2\pi$, на межі якого шукана функція $u(r, \varphi)$ задовольняє такі умови:

$$6.6. u(1, \varphi) = 31 \cos 8\varphi + 32 \sin 9\varphi.$$

$$6.9. u(1, \varphi) = \varphi^2 + \sin 6\varphi.$$

$$6.7. u(1, \varphi) = 27 \cos 4\varphi + 26 \sin 3\varphi.$$

$$6.10. u(1, \varphi) = 2\varphi^2 - \varphi + 3 \cos 7\varphi.$$

$$6.8. u(1, \varphi) = \varphi - \cos \varphi + 2 \sin \varphi.$$

$$6.11. u(1, \varphi) = \varphi^3 - 2 \sin 8\varphi.$$

Приклад 22. Розв'язати крайову задачу для рівняння Пуассона в кільці:

$$\begin{cases} u_{xx} + u_{yy} = \frac{x^2 - y^2}{\sqrt{x^2 + y^2}}, & 1 \leq r \leq 2; \\ u|_{r=1} = 0, \quad u_r|_{r=2} = 0. \end{cases}$$

Розв'язання. Перейдемо до полярної системи координат. Тоді вихідне рівняння з урахуванням виразу для лапласіана (6.12) набуде вигляду

$$u_{rr} + \frac{1}{r}u_r + \frac{1}{r^2}u_{\varphi\varphi} = r \cos 2\varphi. \quad (6.24)$$

Шукатимемо розв'язок у вигляді

$$u(r, \varphi) = \tilde{u}(r, \varphi) + V(r, \varphi), \quad (6.25)$$

де $\tilde{u}(r, \varphi)$ — загальний розв'язок однорідного рівняння $\Delta u = 0$, а $V(r, \varphi)$ — частинний розв'язок (6.25). Нова система рівнянь має вигляд

$$\begin{cases} \Delta V = r \cos 2\varphi, & \tilde{u}|_{r=1} = -V|_{r=1}, \\ \Delta \tilde{u} = 0, & \tilde{u}_r|_{r=2} = -V_r|_{r=2}. \end{cases}$$

Запишемо (6.24) для функції $V(r, \varphi)$:

$$r^2 V_{rr} + r V_r + V_{\varphi\varphi} = r^3 \cos 2\varphi. \quad (6.26)$$

Шукатимемо розв'язок у вигляді

$$V(r, \varphi) = R_0(r) \cdot \Phi_0(\varphi). \quad (6.27)$$

Підставивши (6.27) в (6.26) і розділивши змінні, матимемо

$$\frac{r^2 R_0''(r)}{R_0(r)} + \frac{r R_0'(r)}{R_0(r)} + \frac{\Phi_0''(\varphi)}{\Phi_0(\varphi)} = \frac{r^3 \cos 2\varphi}{R_0(r) \Phi_0(\varphi)}.$$

У лівій частині розташована безрозмірна величина. Для надання безрозмірності і правій частині необхідно, щоб виконувалася рівність

$$R_0(r) \cdot \Phi_0(\varphi) = V(r, \varphi) = \alpha r^3 \cos 2\varphi, \quad \alpha = \text{const}. \quad (6.28)$$

Підставивши (6.28) в (6.26), знайдемо, що $\alpha = \frac{1}{5}$, тобто

$$V(r, \varphi) = \frac{1}{5} r^3 \cos 2\varphi. \quad (6.29)$$

Тепер перейдемо до знаходження функції $\tilde{u}(r, \varphi)$. З урахуванням (6.29) відповідна система матиме вигляд

$$\begin{cases} \tilde{u}_{rr} + \frac{1}{r}\tilde{u}_r + \frac{1}{r^2}\tilde{u}_{\varphi\varphi} = 0, \\ \tilde{u}|_{r=1} = -\frac{1}{5}\cos 2\varphi, \quad \tilde{u}_r|_{r=2} = -\frac{12}{5}\cos 2\varphi. \end{cases} \quad (6.30)$$

Шукатимемо розв'язок у вигляді

$$\tilde{u}(r, \varphi) = R(r) \cdot \Phi(\varphi). \quad (6.31)$$

Підставивши (6.31) у перше рівняння з (6.30), матимемо

$$\frac{r^2 R''(r)}{R(r)} + \frac{r R'(r)}{R(r)} = -\frac{\Phi''(\varphi)}{\Phi(\varphi)} = \lambda.$$

У такий спосіб одержимо систему

$$\begin{cases} \Phi''(\varphi) + \lambda\Phi(\varphi) = 0, & \Phi(\varphi + 2\pi) = \Phi(\varphi), \\ r^2 R''(r) + r R'(r) - \lambda R(r) = 0. \end{cases}$$

Для Φ -функції загальний розв'язок матиме вигляд

$$\Phi(\varphi) = C_1 \cos \sqrt{\lambda}\varphi + C_2 \sin \sqrt{\lambda}\varphi.$$

З урахуванням вимоги періодичності

$$\lambda = n^2, n = 0, 1, 2, \dots \quad (6.32)$$

і остаточно

$$\Phi_n(\varphi) = C_{n1} \cos n\varphi + C_{n2} \sin n\varphi. \quad (6.33)$$

Перейдемо до рівняння для R -функції. Заміною $r = e^t$ приведемо його до вигляду

$$R''(t) - \lambda R(t) = 0,$$

звідки з урахуванням (6.32)

$$R_n(r) = \begin{cases} D_{01} + D_{02} \ln r, & n = 0; \\ D_{n1} r^n + D_{n2} r^{-n}, & n \neq 0. \end{cases} \quad (6.34)$$

Поєднавши (6.31), (6.33) і (6.34), знайдемо

$$\begin{aligned}\tilde{u}(r, \varphi) = A_0 + B_0 \ln r + \sum_{n=1}^{\infty} (A_{n1} r^n + A_{n2} r^{-n}) \cos n\varphi + \\ + \sum_{n=1}^{\infty} (B_{n1} r^n + B_{n2} r^{-n}) \sin n\varphi, \quad (6.35)\end{aligned}$$

де $A_0 = C_{01}D_{01}$, $B_0 = C_{01}D_{02}$, $A_{n1} = C_{n1}D_{n1}$, $A_{n2} = C_{n1}D_{n2}$, $B_{n1} = C_{n2}D_{n1}$, $B_{n2} = C_{n2}D_{n2}$.

Скористаємося крайовими умовами:

$$\tilde{u}(1, \varphi) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (A_{n1} + A_{n2}) \cos n\varphi + (B_{n1} + B_{n2}) \sin n\varphi = -\frac{1}{5} \cos 2\varphi.$$

Звідси

$$\begin{cases} A_0 = 0; \\ A_{n1} + A_{n2} = \begin{cases} -\frac{1}{5}, & n = 2, \\ 0, & n \neq 2; \end{cases} \\ B_{n1} + B_{n2} \equiv 0. \end{cases}$$

$$\begin{aligned}\tilde{u}_r|_{r=2} = \frac{B_0}{2} + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} n (A_{n1} 2^n - A_{n2} 2^{-n}) \cos n\varphi + \\ + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} n (B_{n1} 2^n - B_{n2} 2^{-n}) \sin n\varphi = -\frac{12}{5} \cos 2\varphi.\end{aligned}$$

Звідси

$$\begin{cases} A_{n1} 2^n - A_{n2} 2^{-n} = -\frac{24}{5n} \Rightarrow 4A_{n1} - \frac{A_{n2}}{4} = -\frac{12}{5}, & n = 2, \\ A_{n1} 2^n - A_{n2} 2^{-n} = 0, & n \neq 2, \\ B_0 = 0, \\ B_{n1} 2^n - B_{n2} 2^{-n} \equiv 0. \end{cases}$$

У такий спосіб отримаємо три системи лінійних рівнянь.

1. У разі $n = 2$:

$$\begin{cases} A_{21} + A_{22} = -\frac{1}{5}, \\ 4A_{21} - \frac{A_{22}}{4} = -\frac{12}{5}; \end{cases} \quad \text{звідки} \quad \begin{cases} A_{21} = -\frac{49}{85}, \\ A_{22} = \frac{32}{85}. \end{cases}$$

2. У разі $n \neq 2$:

$$\begin{cases} A_{n1} + A_{n2} = 0, \\ A_{n1}r^n + A_{n2}r^{-n} = 0; \end{cases} \quad \text{звідки} \quad \begin{cases} A_{n1} \equiv 0, \\ A_{n2} \equiv 0. \end{cases}$$

3. У разі довільного n :

$$\begin{cases} B_{n1} + B_{n1} = 0, \\ B_{n1}r^n + B_{n2}r^{-n} = 0; \end{cases} \quad \text{звідки} \quad \begin{cases} B_{n1} \equiv 0, \\ B_{n2} \equiv 0. \end{cases}$$

Підставивши отримані результати в (6.35), одержимо

$$\tilde{u}(r, \varphi) = -\frac{1}{85} (49r^2 - 32r^{-2}) \cos 2\varphi. \quad (6.36)$$

Остаточно з (6.25), (6.29) і (6.36) матимемо

$$u(r, \varphi) = \left(\frac{1}{5}r^3 - \frac{49}{85}r^2 + \frac{32}{85}r^{-2} \right) \cos 2\varphi.$$

Завдання для самостійного виконання

Розв'язати крайову задачу для рівняння Пуассона в кільці:

$$6.12. \begin{cases} u_{xx} + u_{yy} = \frac{x^2 - y^2}{\sqrt{x^2 + y^2}}, & 1 \leq r \leq 2; \\ u|_{r=1} = 1, \quad u_r|_{r=2} = 0. \end{cases}$$

$$6.13. \begin{cases} u_{xx} + u_{yy} = \frac{x^2 - y^2}{\sqrt{x^2 + y^2}}, & 1 \leq r \leq 2; \\ u|_{r=1} = 0, \quad u_r|_{r=2} = 1. \end{cases}$$

$$6.14. \begin{cases} u_{xx} + u_{yy} = \frac{x^2 - y^2}{\sqrt{x^2 + y^2}}, & \frac{1}{2} \leq r \leq 1; \\ u|_{r=\frac{1}{2}} = 0, \quad u_r|_{r=1} = 1. \end{cases}$$

$$6.15. \begin{cases} u_{xx} + u_{yy} = \frac{x^2 - y^2}{\sqrt{x^2 + y^2}}, & \frac{1}{2} \leq r \leq 1; \\ u|_{r=\frac{1}{2}} = 2x, \quad \frac{\partial u}{\partial n} \Big|_{r=\frac{1}{2}} = x + 1. \end{cases}$$

$$6.16. \begin{cases} u_{xx} + u_{yy} = \frac{x^2 - y^2}{\sqrt{x^2 + y^2}}, & 1 \leq r \leq 3; \\ u|_{r=1} = y, \quad u_r|_{r=3} = 3y. \end{cases}$$

6.3. Метод розділення змінних для рівняння Лапласа в кулі

Розглянемо рівняння Лапласа в кулі B_R радіуса R :

$$\begin{cases} u_{xx} + u_{yy} + u_{zz} = 0, \\ x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2. \end{cases} \quad (6.37)$$

Для розділення змінних перейдемо до системи координат, де куля має вигляд паралелепіпеда, тобто до сферичної системи:

$$\begin{cases} x = r \cos \theta, \\ y = r \sin \theta \cos \varphi, \\ z = r \sin \theta \sin \varphi. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, \\ \theta = \arctg \frac{\sqrt{y^2 + z^2}}{x}, \\ \varphi = \arctg \frac{z}{y}. \end{cases}$$

Відтак крайова умова набуде вигляду

$$u|_{\partial B_R} = g(\theta, \varphi).$$

Тепер з'ясуємо, як перетвориться рівняння Лапласа у разі переходу до сферичної системи координат:

$$\begin{aligned} r_x &= \frac{x}{r}, & r_y &= \frac{y}{r}, & r_z &= \frac{z}{r}, \\ \theta_x &= -\frac{\sqrt{y^2 + z^2}}{r^2}, & \theta_y &= \frac{xy}{r^2 \sqrt{y^2 + z^2}}, & \theta_z &= \frac{xz}{r^2 \sqrt{y^2 + z^2}}, \\ \varphi_x &= 0, & \varphi_y &= -\frac{z}{y^2 + z^2}, & \varphi_z &= \frac{y}{y^2 + z^2}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Delta u &= u_{rr} (\nabla r)^2 + u_{\theta\theta} (\nabla \theta)^2 + u_{\varphi\varphi} (\nabla \varphi)^2 + \\ &+ 2u_{r\theta} (\nabla r \nabla \theta) + 2u_{r\varphi} (\nabla r \nabla \varphi) + 2u_{\theta\varphi} (\nabla \theta \nabla \varphi) + u_r \Delta r + u_\theta \Delta \theta + u_\varphi \Delta \varphi, \end{aligned}$$

Вдаючись до формул

$$\begin{aligned} r_{xx} &= \frac{1}{r} - \frac{x^2}{r^3}, & r_{yy} &= \frac{1}{r} - \frac{y^2}{r^3}, & r_{zz} &= \frac{1}{r} - \frac{z^2}{r^3}; \\ \theta_{xx} &= \frac{2x\sqrt{y^2 + z^2}}{r^4}, \\ \theta_{yy} &= \frac{x}{r^2 \sqrt{y^2 + z^2}} - \frac{1}{2} \frac{y^2 x^2}{r^2 (\sqrt{y^2 + z^2})^3} - \frac{2y^2 x}{r^4 \sqrt{y^2 + z^2}}, \end{aligned}$$

$$\theta_{zz} = \frac{x}{r^2 \sqrt{y^2 + z^2}} - \frac{1}{2} \frac{z^2 x^2}{r^2 \left(\sqrt{y^2 + z^2} \right)^3} - \frac{2z^2 x}{r^4 \sqrt{y^2 + z^2}};$$

$$\varphi_{xx} = 0, \quad \varphi_{yy} = \frac{2zy}{(y^2 + z^2)^2}, \quad \varphi_{zz} = -\frac{2zy}{(y^2 + z^2)^2},$$

отримаємо

$$\Delta r = \frac{2}{r}, \quad \Delta \theta = \frac{x}{r^2 \sqrt{y^2 + z^2}} = \frac{\cos \theta}{r^2 \sin \theta}, \quad \Delta \varphi = 0,$$

$$(\nabla r)^2 = 1, \quad (\nabla \theta)^2 = \frac{1}{r^2}, \quad (\nabla \varphi)^2 = \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta},$$

$$(\nabla r, \nabla \theta) = (\nabla r, \nabla \varphi) = (\nabla \theta, \nabla \varphi) = 0.$$

Отже, у сферичних координатах тривимірний оператор Лапласа матиме вигляд

$$\begin{cases} \Delta u = u_{rr} + \frac{2}{r} u_r + \frac{1}{r^2} u_{\theta\theta} + \frac{\cos \theta}{r^2 \sin \theta} u_\theta + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} u_{\varphi\varphi}, \\ 0 \leq r \leq R, \quad 0 \leq \theta \leq \pi, \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi. \end{cases} \quad (6.38)$$

Зобразимо розв'язок задачі (6.37) у вигляді

$$u(r, \theta, \varphi) = v(r) h(\theta, \varphi),$$

тоді з урахуванням (6.38) вихідне рівняння набуде вигляду

$$r^2 \frac{v'' + \frac{2}{r} v'}{v} + \frac{h_{\theta\theta}}{h} + \frac{\cos \theta h_\theta}{\sin \theta h} + \frac{h_{\varphi\varphi}}{\sin^2 \theta h} = 0.$$

Ми отримали два рівняння: для функції $v(r)$ — рівняння Ейлера (6.15):

$$r^2 v'' + 2r v' = \lambda v,$$

розв'язок якого має вигляд $v = r^{-\frac{1}{2} \pm \sqrt{\lambda + \frac{1}{4}}}$, а для функції $h(\theta, \varphi)$ — рівняння

$$h_{\theta\theta} + \frac{\cos \theta h_\theta}{\sin \theta} + \frac{h_{\varphi\varphi}}{\sin^2 \theta} = -\lambda h.$$

Останнє рівняння зазвичай переписують у більш компактній формі:

$$\frac{1}{\sin \theta} (\sin \theta h_\theta)_\theta + \frac{h_{\varphi\varphi}}{\sin^2 \theta} = -\lambda h \quad (6.39)$$

і називають **рівнянням Лапласа–Бельтрамі**. Це рівняння як «проекція» на поверхні сфери рівняння Лапласа становить і самостійний інтерес як окремий випадок диференціальних рівнянь на багатовиді. Зазвичай це рівняння супроводжують такі умови періодичності:

$$\begin{aligned} h(\theta, 0) &= h(\theta, 2\pi), & h_\varphi(\theta, 0) &= h_\varphi(\theta, 2\pi), & h(0, \varphi_1) &= h(0, \varphi_2), \forall \varphi_1, \varphi_2, \\ h(0, \varphi) &= 0, & h(\pi, \varphi_1) &= h(\pi, \varphi_2), & h(\pi, \varphi) &= 0. \end{aligned}$$

Розв'язки рівняння Лапласа–Бельтрамі називають **сферичними гармоніками** $Y_k^m(\theta, \varphi)$ (див. розділ 7.8.), вони мають таке саме значення для сфери, що і синуси та косинуси для кола. Ортогональність сферичних гармонік дозволяє зобразити розв'язок рівняння Лапласа (6.37) у вигляді ряду

$$u(x, y, z) = \sum_{k=0}^{\infty} r^k C_{km} Y_k^m(\theta, \varphi), \quad (6.40)$$

де

$$C_{km} = \int_S g(\theta, \varphi) Y_k^m(\theta, \varphi) d\theta d\varphi.$$

Приклад 23. Розв'язати задачу для рівняння Пуассона в кульовому шарі:

$$\begin{cases} u_{xx} + u_{yy} + u_{zz} = xz, & 1 < r < 2; \\ u|_{r=1} = 0, & u_r|_{r=2} = 0. \end{cases}$$

Розв'язання. Шукатимемо розв'язок у вигляді

$$u(x, y, z) = \tilde{u}(x, y, z) + V(x, y, z), \quad (6.41)$$

де $\tilde{u}(x, y, z)$ — загальний розв'язок однорідного рівняння

$$\Delta \tilde{u} = 0, \quad (6.42)$$

а $V(x, y, z)$ — частинний розв'язок (6.41). З урахуванням крайових умов нова система рівнянь матиме вигляд

$$\begin{cases} \Delta V = xz, & \Delta \tilde{u} = 0, \\ \tilde{u}|_{r=1} = -V|_{r=1}, & \tilde{u}|_{r=2} = -V|_{r=2}. \end{cases} \quad (6.43)$$

Можна легко показати, що функція

$$V(x, y, z) = \frac{1}{14} xz (x^2 + y^2 + z^2)$$

задовольняє рівняння $\Delta V = xz$, тобто є шуканий частинний розв'язок. Запишемо нові крайові умови:

$$V|_{r=1} = \frac{1}{14}xz; \quad V|_{r=2} = \frac{2}{7}xz.$$

Отже, для функції $\tilde{u}(x, y, z)$ матимемо

$$\begin{cases} \Delta \tilde{u} = 0, \\ \tilde{u}|_{r=1} = -\frac{1}{14}xz, \quad \tilde{u}|_{r=2} = -\frac{2}{7}xz. \end{cases} \quad (6.44)$$

Перейдемо до сферичних координат, де запишемо систему (6.44) у такий спосіб:

$$\begin{cases} \tilde{u}_{rr} + \frac{2}{r}\tilde{u}_r + \frac{1}{r^2}\tilde{u}_{\theta\theta} + \frac{\operatorname{ctg} \theta}{r^2}\tilde{u}_\theta + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta}\tilde{u}_{\varphi\varphi} = 0, \\ \tilde{u}|_{r=1} = -\frac{1}{28} \sin 2\theta \cos \varphi, \quad \tilde{u}|_{r=2} = -\frac{4}{7} \sin 2\theta \cos \varphi. \end{cases} \quad (6.45)$$

Шукатимемо розв'язок у вигляді

$$\tilde{u}(r, \theta, \varphi) = R(r) F(\theta, \varphi). \quad (6.46)$$

Підставивши (6.46) в (6.45), матимемо

$$r^2 \frac{R''(r)}{R(r)} + 2r \frac{R'(r)}{R(r)} + \frac{F_{\theta\theta}(\theta, \varphi)}{F(\theta, \varphi)} + \operatorname{ctg} \theta \frac{F_\theta(\theta, \varphi)}{F(\theta, \varphi)} + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{F_{\varphi\varphi}(\theta, \varphi)}{F(\theta, \varphi)} = 0.$$

Розділивши змінні, отримаємо

$$\begin{cases} r^2 R''(r) + 2r R'(r) - \lambda R(r) = 0, \\ \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta \cdot F_\theta(\theta, \varphi)) + \frac{1}{\sin \varphi} F_{\varphi\varphi}(\theta, \varphi) + \lambda \sin \varphi \cdot F(\theta, \varphi) = 0. \end{cases} \quad (6.47)$$

Друге рівняння з (6.47), як відомо, є рівняння сферичних гармонік, і його розв'язок обмежений за $\theta = 0$ і $\theta = \pi$ тільки у разі $\lambda = n(n+1)$, $n = 0, 1, 2, \dots$. Тоді рівняння для $R(r)$ запишемо у вигляді

$$r^2 R''(r) + 2r R'(r) - n(n+1) R(r) = 0.$$

Заміною $r = e^t$ приведемо його до вигляду

$$R''(t) + R'(t) - n(n+1) R(t) = 0,$$

звідки одержимо розв'язок

$$R_n(r) = C_{n1} r^n + C_{n2} r^{-(n+1)}. \quad (6.48)$$

Повернемося до рівняння для сферичних гармонік, яке допускає подальше розділення змінних. Дійсно, зобразимо $F(\theta, \varphi)$ у вигляді

$$F(\theta, \varphi) = \Theta(\theta) \Phi(\varphi). \quad (6.49)$$

Тоді

$$\sin^2 \theta \frac{\Theta''(\theta)}{\Theta(\theta)} + \sin \theta \cos \theta \frac{\Theta'(\theta)}{\Theta(\theta)} + n(n+1) \sin \theta \cos \theta + \frac{\Phi''(\varphi)}{\Phi(\varphi)} = 0.$$

Увівши новий параметр розділення m^2 і перейшовши до заміни $\mu = \cos \theta$, одержимо

$$\begin{cases} \Phi''(\varphi) + m^2 \Phi(\varphi) = 0, & \Phi(\varphi + 2\pi) = \Phi(\varphi), \\ \frac{d}{d\mu} \left[(1 - \mu^2) \frac{d\Theta(\mu)}{d\mu} \right] + \left[n(n+1) - \frac{m^2}{1 - \mu^2} \right] \Theta(\mu) = 0, & |\Theta(0)| < \infty, |\Theta(\pi)| < \infty. \end{cases}$$

Розв'язки цих рівнянь, як відомо, мають вигляд

$$\begin{cases} \Phi_m(\varphi) = \begin{cases} D_{01}\varphi + D_{02}, & m = 0 \\ D_{m1} \cos m\varphi + D_{m2} \sin m\varphi, & m \neq 0 \end{cases} \\ \Theta_n(\theta) = E_{n1} P_n^m(\cos \theta) + E_{n2} Q_n^m(\cos \theta), \end{cases}$$

де P_n^m і Q_n^m — приєднані функції Лежандра першого й другого роду відповідно (див. розділ 7.7.). Застосувавши до функції $\Theta(\theta)$ умову обмеженості, одержимо, що $E_{n2} \equiv 0$. Отже,

$$\begin{cases} \Phi_m(\varphi) = \begin{cases} D_{01}\varphi + D_{02}, & m = 0 \\ D_{m1} \cos m\varphi + D_{n2} \sin m\varphi, & m \neq 0 \end{cases} \\ \Theta_n(\theta) = E_{n1} P_n^m(\cos \theta). \end{cases} \quad (6.50)$$

Із (6.46) і (6.48)–(6.50) знайдемо, що

$$\begin{aligned} \tilde{u}(r, \theta, \varphi) &= \sum_{n,m=1}^{\infty} \left(\tilde{C}_{n1} r^n + \tilde{C}_{n2} r^{-(n+1)} \right) \times \\ &\times (D_{m1} \cos m\varphi + D_{m2} \sin m\varphi) P_n^m(\cos \theta), \end{aligned} \quad (6.51)$$

де $\tilde{C}_{n1} = C_{n1} E_{n1}$, $\tilde{C}_{n2} = C_{n2} E_{n1}$.

Скористаємося початковими умовами з (6.45):

$$\tilde{u}(1, \theta, \varphi) = \sum_{n,m=1}^{\infty} \left(\tilde{C}_{n1} + \tilde{C}_{n2} \right) (D_{m1} \cos m\varphi + D_{m2} \sin m\varphi) P_n^m(\cos \theta) =$$

$$= -\frac{1}{28} \sin 2\theta \cos \varphi. \quad (6.52)$$

Звідси одразу видно, що $D_{m2} \equiv 0$; $(\tilde{C}_{n1} + \tilde{C}_{n2}) D_{m1} = \alpha = \text{const}$, за $m = 1$; $D_{m1} \equiv 0$ за $m \neq 1$. Отже, в (6.52) можна залишити тільки одне підсумовування:

$$\tilde{U}(1, \theta, \varphi) = \sum_{n=1}^{\infty} (\tilde{C}_{n1} + \tilde{C}_{n2}) D_{11} \cos \varphi \cdot P_n^1(\cos \theta) = -\frac{1}{28} \sin 2\theta \cos \varphi. \quad (6.53)$$

Зауважимо, що

$$P_2^1(\cos \theta) = -3 \cos \theta \sqrt{1 - \cos^2 \theta} = -\frac{3}{2} \sin 2\theta. \quad (6.54)$$

Отже, $\hat{C}_{n1} + \hat{C}_{n2} \equiv 0$ за $n \neq 2$, $\hat{C}_{n1} + \hat{C}_{n2} = \frac{1}{42}$ за $n = 2$, де $\hat{C}_{n1} = \tilde{C}_{n1} D_{11}$, $\hat{C}_{n2} = \tilde{C}_{n2} D_{11}$.

Перепишемо (6.51) з урахуванням отриманих результатів:

$$\tilde{u}(r, \theta, \varphi) = \sum_{n=1}^{\infty} (\hat{C}_{n1} r^n + \hat{C}_{n2} r^{-(n+1)}) \cos \varphi \cdot P_n^1(\cos \theta). \quad (6.55)$$

Скористаємося другою початковою умовою:

$$\begin{aligned} \tilde{u}(2, \theta, \varphi) &= \sum_{n=1}^{\infty} (2^n \hat{C}_{n1} + 2^{-(n+1)} \hat{C}_{n2}) \cos \varphi \cdot P_n^1(\cos \theta) = \\ &= \frac{4}{7} \sin 2\theta \cos \varphi. \end{aligned} \quad (6.56)$$

Знову застосувавши (6.54), знайдемо, що

$$\begin{aligned} 2^n \hat{C}_{n1} + 2^{-(n+1)} \hat{C}_{n2} &\equiv 0 \text{ за } n \neq 2; \\ 2^n \hat{C}_{n1} + 2^{-(n+1)} \hat{C}_{n2} &= 4\hat{C}_{n1} + \frac{1}{8}\hat{C}_{n2} = \frac{8}{21} \text{ за } n = 2. \end{aligned}$$

Отже, одержимо такі системи рівнянь.

1. За $n = 2$:

$$\begin{cases} \hat{C}_{21} + \hat{C}_{22} = \frac{1}{42}, \\ 4\hat{C}_{21} + \frac{1}{8}\hat{C}_{22} = \frac{8}{21}, \end{cases} \quad \text{звідки} \quad \begin{cases} \hat{C}_{11} = 127/1302, \\ \hat{C}_{22} = -16/217. \end{cases}$$

2. За $n \neq 2$:

$$\begin{cases} \hat{C}_{n1} + \hat{C}_{n2} = 0, \\ 2^n \hat{C}_{n1} + 2^{-(n+1)} \hat{C}_{n2} = 0, \end{cases} \quad \text{звідки} \quad \begin{cases} \hat{C}_{n1} \equiv 0, \\ \hat{C}_{n2} \equiv 0. \end{cases}$$

Підставивши отримані результати в (6.55), знайдемо, що

$$\tilde{u}(r, \theta, \varphi) = \left(\frac{24}{217} r^{-3} - \frac{127}{868} r^2 \right) \sin 2\theta \cos \varphi. \quad (6.57)$$

Поєднавши (6.57) з виразом для функції V , одержимо остаточно, що

$$u(r, \theta, \varphi) = \left(\frac{1}{28} r^4 - \frac{127}{868} r^2 + \frac{24}{217} r^{-3} \right) \sin 2\theta \cos \varphi.$$

Завдання для самостійного виконання

Розв'язати внутрішню задачу Діріхле для рівняння Лапласа:

$$\begin{aligned} 6.17. \quad & \begin{cases} \Delta u = 0, & r < r_0; \\ u(r, \theta, \varphi) |_{r=r_0} = u_0 \cos 2\theta. \end{cases} & 6.19. \quad & \begin{cases} \Delta u = 0, & r < r_0; \\ u(r, \theta, \varphi) |_{r=r_0} = \sin 3\theta - \cos 2\theta. \end{cases} \\ 6.18. \quad & \begin{cases} \Delta u = 0, & r < r_0; \\ u(r, \theta, \varphi) |_{r=r_0} = 2u_0 \sin 2\theta. \end{cases} & 6.20. \quad & \begin{cases} \Delta u = 0, & r < r_0; \\ u(r, \theta, \varphi) |_{r=r_0} = 2 \sin 4\theta + \cos \theta. \end{cases} \end{aligned}$$

Розв'язати зовнішню задачу Неймана для рівняння Лапласа:

$$\begin{aligned} 6.21. \quad & \begin{cases} \Delta u = 0, & r > r_0; \\ \frac{\partial u}{\partial r}(r, \theta, \varphi) \Big|_{r=r_0} = u_0 \sin \theta \sin(\alpha - \varphi), & \alpha = \text{const.} \end{cases} \\ 6.22. \quad & \begin{cases} \Delta u = 0, & r > r_0; \\ \frac{\partial u}{\partial r}(r, \theta, \varphi) \Big|_{r=r_0} = u_0 \cos 2\theta \cos(\gamma + \varphi), & \gamma = \text{const.} \end{cases} \\ 6.23. \quad & \begin{cases} \Delta u = 0, & r > r_0; \\ \frac{\partial u}{\partial r}(r, \theta, \varphi) \Big|_{r=r_0} = u_0 \sin 3\theta \cos(2\beta - \varphi), & \beta = \text{const.} \end{cases} \end{aligned}$$

Розв'язати задачу Діріхле для рівняння Лапласа в кульовому шарі:

$$\begin{aligned} 6.24. \quad & \begin{cases} \Delta u = 0, & 1 < r < 2; \\ u(r, \theta, \varphi) |_{r=1} = \sin 2\theta \cos \varphi, & u(r, \theta, \varphi) |_{r=2} = \sin 2\theta \sin \varphi. \end{cases} \\ 6.25. \quad & \begin{cases} \Delta u = 0, & 2 < r < 3; \\ u(r, \theta, \varphi) |_{r=2} = \cos \theta \cos \varphi, & u(r, \theta, \varphi) |_{r=3} = \cos \theta \sin \varphi. \end{cases} \\ 6.26. \quad & \begin{cases} \Delta u = 0, & 3 < r < 4; \\ u(r, \theta, \varphi) |_{r=3} = \sin 2\theta \sin 2\varphi, & u(r, \theta, \varphi) |_{r=4} = \cos 2\theta \cos \varphi. \end{cases} \end{aligned}$$

6.4. Фундаментальні розв'язки рівняння Гельмгольца

Рівняння Гельмгольца

$$\Delta u + cu = f(x, y, z) \quad (6.58)$$

поряд із рівняннями Лапласа й Пуассона являє собою важливий вид еліптичних рівнянь другого порядку. Однорідне рівняння ($f(x, y, z) = 0$), наприклад, природно виникає (у багатовимірному випадку) під час застосування методу розділення змінних для гіперболічних і параболічних задач. Знаходження власних функцій і власних значень зводиться до можливості розв'язання відповідної крайової задачі для рівняння Гельмгольца з $f(x, y, z) \equiv 0$.

Побудуємо фундаментальний розв'язок однорідного рівняння (6.58). Спочатку розглянемо тривимірний випадок. Нехай M_0 — деяка фіксована точка. Уведемо сферичну систему координат (r, θ, ϕ) із центром у точці M_0 . Знайдемо розв'язок рівняння (6.58), що залежить тільки від r (радіально-симетричний розв'язок). Записавши оператор Лапласа у сферичній системі координат і врахувавши, що u залежить тільки від r , одержимо

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{du}{dr} \right) + cu = 0. \quad (6.59)$$

Оскільки

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{du}{dr} \right) \equiv \frac{1}{r} \frac{d^2}{dr^2} (r \cdot u),$$

то, зробивши заміну

$$v = r \cdot u,$$

рівняння (6.59) запишемо у вигляді

$$\frac{d^2 v}{dr^2} + cv = 0. \quad (6.60)$$

Нехай $c = k^2 > 0$ (k — дійсне, $k > 0$). Рівняння (6.60) набуде вигляду

$$\frac{d^2 v}{dr^2} + k^2 v = 0,$$

його розв'язок запишемо як

$$v = C_1 e^{ikr} + C_2 e^{-ikr}$$

або, скориставшись дійсними лінійно незалежними розв'язками, у вигляді

$$v = A_1 \cos(kr) + A_2 \sin(kr).$$

У разі $c = -\zeta^2 < 0$ (ζ — дійсне, $\zeta > 0$) розв'язок рівняння (6.60) матиме вигляд

$$v = C_1 e^{\zeta r} + C_2 e^{-\zeta r}.$$

У такий спосіб знайдемо радіально-симетричні відносно точки M_0 ($r = R_{MM_0}$) розв'язки рівняння (6.60):

$$u = \frac{e^{\pm ikr}}{r} \quad \text{за } c = k^2 > 0,$$

$$u = \frac{e^{\pm \zeta r}}{r} \quad \text{за } c = -\zeta^2 < 0.$$

Розглянемо поведінку цих розв'язків за $r \rightarrow \infty$. У разі $c = -\zeta^2$ для внутрішньої крайової задачі, якщо точка $r \rightarrow 0$ належить області V , додаткова вимога скінченності розв'язку встановлює співвідношення між константами: $C_1 = C_2$, що приводить до розв'язку виду $\frac{1}{r} \text{sh } \zeta r$. У разі зовнішньої крайової задачі експоненційно зростальний доданок $\frac{1}{r} e^{\zeta r}$ необмежено зростає на нескінченності й фізичного змісту не має, у той час як розв'язок $\frac{1}{r} e^{-\zeta r}$ експоненційно спадає на нескінченності. Його і називають фундаментальним розв'язком за $c = -\zeta^2$.

У разі $c = k^2 > 0$ ситуація складніша, оскільки обидва розв'язки

$$\frac{e^{ikr}}{r} \quad \text{і} \quad \frac{e^{-ikr}}{r}, \quad (6.61)$$

а також дійсний розв'язок

$$\frac{\cos kr}{r} \quad (6.62)$$

під час розгляду зовнішнього завдання ($r \rightarrow \infty$) спадають за тим самим законом. Ще один дійсний розв'язок $\frac{\sin kr}{r}$ ми не розглядаємо, тому що він обмежений у всьому просторі. У разі дослідження рівняння $\Delta u + k^2 u = 0$ в обмеженій області розв'язки (6.61) і (6.62) еквівалентні й кожен із них є фундаментальний розв'язок цього рівняння.

Розглянувши внутрішню задачу для випадку $c = k^2 > 0$, дійдемо висновку, що вимога скінченності у точці $r \rightarrow 0$ приводить до умови $A_1 = 0$ і фундаментальним розв'язком у цьому разі буде функція вигляду $\frac{\sin(kr)}{r}$.

Відтак розглянемо плоский випадок. Уведемо полярну систему координат (r, φ) з початком у точці M_0 . Розв'язок u , що залежить тільки від r ,

задовольняє рівняння

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{du}{dr} \right) + cu = 0 \Rightarrow \frac{d^2 u}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{du}{dr} + cu = 0. \quad (6.63)$$

За $c = -\zeta^2 < 0$ рівняння (6.63) є рівняння для функцій Бесселя су-
то уявного аргументу нульового порядку (див. розділ 7.6.), і його загальний
розв'язок можна записати у вигляді

$$u = C_1 i_0(\zeta r) + C_2 K_0(\zeta r).$$

Фундаментальним розв'язком рівняння $\Delta u - \zeta^2 u = 0$ називають функцію
 $K_0(\zeta r)$, яка експоненційно спадає на нескінченності й за $r \rightarrow 0$ має особ-
ливість вигляду

$$K_0(\zeta r) \sim \ln \frac{1}{\zeta r}.$$

У разі $c = k^2 > 0$ рівняння (6.63) являє собою рівняння Бесселя ну-
льового порядку (див. розділ 7.6.). Отже, його загальний розв'язок можна
зобразити у двох виглядах:

$$u = C_1 H_0^{(1)}(kr) + C_2 H_0^{(2)}(kr)$$

або

$$u = A_1 J_0(kr) + A_2 N_0(kr).$$

За $c = k^2 > 0$ ситуація аналогічна тривимірному випадку. В обмеженій об-
ласті розв'язки $H_0^{(1)}(kr)$, $H_0^{(2)}(kr)$ та $N_0(kr)$ еквівалентні і є фундамен-
тальними розв'язками рівняння Гельмгольца $\Delta u + k^2 u = 0$. У необмеженій області
фундаментальним розв'язком того ж рівняння є одна з функцій $H_0^{(1,2)}(kr)$
залежно від того, яку додаткову умову поставлено на нескінченність.

Приклад 24. Розв'язати задачу Діріхле для рівняння Гельмгольца у
колі:

$$\begin{cases} \Delta u + k^2 u = 0, & 0 \leq r < 1, \\ u|_{r=1} = 25 \sin^3 \varphi. \end{cases}$$

Розв'язання. Запишемо вихідне рівняння в полярній системі координат:

$$u_{rr} + \frac{1}{r} u_r + \frac{1}{r^2} u_{\varphi\varphi} + k^2 u = 0. \quad (6.64)$$

Шукатимемо розв'язок у вигляді

$$u(r, \varphi) = R(r) \Phi(\varphi). \quad (6.65)$$

Підставивши (6.65) в (6.64), матимемо

$$\frac{r^2 R''(r)}{R(r)} + \frac{r R'(r)}{R(r)} + \frac{\Phi''(\varphi)}{\Phi(\varphi)} + k^2 r^2 = 0.$$

Розділивши змінні, одержимо

$$\begin{cases} r^2 R''(r) + r R'(r) + (k^2 r^2 - \lambda) R(r) = 0, & |R(0)| < \infty; \\ \Phi''(\varphi) + \lambda \Phi(\varphi) = 0, & \Phi(\varphi + 2\pi) = \Phi(\varphi). \end{cases}$$

Для Φ -функції, як відомо, у загальному випадку

$$\Phi(\varphi) = C_1 \cos \sqrt{\lambda} \varphi + C_2 \sin \sqrt{\lambda} \varphi. \quad (6.66)$$

Наклавши на (6.66) умову періодичності, отримаємо, що

$$\lambda = n^2, n = 0, 1, 2, \dots \quad (6.67)$$

Тоді

$$\Phi_0(\varphi) = C_{01}, \quad \Phi_n(\varphi) = C_{n1} \cos n\varphi + C_{n2} \sin n\varphi. \quad (6.68)$$

Перейдемо до розв'язку R -рівняння. З урахуванням (6.67) воно набуде вигляду

$$r^2 R''(r) + r R'(r) + (k^2 r^2 - n^2) R(r) = 0. \quad (6.69)$$

Як відомо, (6.69) — це рівняння Бесселя, яке має розв'язок

$$R_n(r) = A_n \cdot J_n(kr) + B_n \cdot N_n(kr),$$

де J_n і N_n — відповідно функції Бесселя й Неймана (див. розділ 7.6.) порядку n . Вимагаючи обмеженості радіальної функції в нулі, одержимо, що $B_n \equiv 0$, тобто

$$R_n(r) = A_n \cdot J_n(kr). \quad (6.70)$$

Отже, з (6.65), (6.68) і (6.70) одержимо

$$u(r, \varphi) = C_{01} \cdot J_0(kr) + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\tilde{A}_n \cos n\varphi + \tilde{B}_n \sin n\varphi \right) \cdot J_n(kr),$$

де $\tilde{A}_n = A_n C_{n1}$, $\tilde{B}_n = A_n C_{n2}$.

Скористаємося крайовою умовою:

$$u(1, \varphi) = C_{01} \cdot J_0(k) + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\tilde{A}_n \cos n\varphi + \tilde{B}_n \sin n\varphi \right) \cdot J_n(k) = 25 \sin^3 \varphi. \quad (6.71)$$

Перетворимо праву частину (6.71):

$$25 \sin^3 \varphi = \frac{25}{2} (\sin \varphi - \sin \varphi \cos 2\varphi) = \frac{25}{4} (3 \sin \varphi - \sin 3\varphi).$$

Отже,

$$C_{01} \cdot J_0(k) + \sum_{n=1}^{\infty} (\tilde{A}_n \cos n\varphi + \tilde{B}_n \sin n\varphi) \cdot J_n(k) = \frac{25}{4} (3 \sin \varphi - \sin 3\varphi).$$

З отриманого співвідношення видно, що

$$\begin{aligned} C_{01} &= 0; \\ \tilde{A}_n &= 0; \end{aligned} \quad \tilde{B}_n = \begin{cases} \frac{75}{4J_1(k)}, & n = 1 \\ -\frac{25}{4J_3(k)}, & n = 3 \\ 0, & \forall (n = 2) \cup (n > 3). \end{cases}$$

Остаточно

$$u(r, \varphi) = \frac{75}{4J_1(k)} \sin \varphi \cdot J_1(kr) - \frac{25}{4J_3(k)} \sin 3\varphi \cdot J_3(kr).$$

Завдання для самостійного виконання

Знайти функцію, що задовольняє всередині кола рівняння Гельмгольца:

$$\begin{aligned} 6.27. \quad & \begin{cases} \Delta u + 4u = 0, & 0 \leq r < 3/2; \\ u(r, \varphi)|_{r=3/2} = 24 \sin^3 \varphi. \end{cases} & 6.30. \quad & \begin{cases} \Delta u + 16u = 0, & 0 \leq r < 1; \\ \frac{\partial u(r, \varphi)}{\partial r} \Big|_{r=1} = \sin \varphi + \cos^2 \varphi. \end{cases} \\ 6.28. \quad & \begin{cases} \Delta u + u = 0, & 0 \leq r < 9/2; \\ u(r, \varphi)|_{r=9/2} = 6 \sin^2 \varphi \cos \varphi. \end{cases} & 6.31. \quad & \begin{cases} \Delta u + 25u = 0, & 0 \leq r < 2; \\ \frac{\partial u(r, \varphi)}{\partial r} \Big|_{r=2} = \sin^2 \varphi - \cos \varphi. \end{cases} \\ 6.29. \quad & \begin{cases} \Delta u + 9u = 0, & 0 \leq r < 10; \\ u(r, \varphi)|_{r=10} = \sin \varphi \cos^2 \varphi. \end{cases} \end{aligned}$$

Приклад 25. Розв'язати задачу Неймана для рівняння Гельмгольца в кулі:

$$\begin{cases} \Delta u + u = 0, & 0 \leq r < \frac{\pi}{2}, \\ \frac{\partial u}{\partial r} \Big|_{r=\pi/2} = \cos \theta. \end{cases}$$

Розв'язання. Зазначимо, що початкові умови й коефіцієнти вихідного рівняння не залежать від полярного кута φ . Отже, не залежатиме від нього і розв'язок. Шукатимемо розв'язок у вигляді

$$u(r, \theta, \varphi) = U(r, \theta) = R(r) \Omega(\theta). \quad (6.72)$$

Перейшовши до сферичних координат і підставивши (6.72) у вихідне рівняння, одержимо

$$\frac{r^2 R''(r)}{R(r)} + \frac{2r R'(r)}{R(r)} + r^2 = -\frac{\Omega''(\theta)}{\Omega(\theta)} - \operatorname{ctg} \theta \frac{\Omega'(\theta)}{\Omega(\theta)} = \lambda.$$

Розділивши змінні, отримаємо

$$\begin{cases} r^2 R''(r) + 2r R'(r) + (r^2 - \lambda) R(r) = 0, & |R(0)| < \infty; \\ \Omega''(\theta) + \operatorname{ctg} \theta \cdot \Omega'(\theta) + \lambda \Omega(\theta) = 0, & |\Omega(0)| < \infty, |\Omega(\pi)| < \infty. \end{cases} \quad (6.73)$$

Почнемо з рівняння для $\Omega(\theta)$. Уведемо заміну $t = \cos \theta$, тоді друге рівняння з (6.73) набуде вигляду

$$(1 - t^2) \Omega''(t) - 2t \Omega'(t) + \nu(\nu + 1) \Omega(t) = 0, \quad \lambda = \nu(\nu + 1). \quad (6.74)$$

Рівняння (6.74) — це рівняння Лежандра, яке має загальний розв'язок

$$\Omega(t) = C_1 P_\nu(t) + C_2 Q_\nu(t),$$

де $P_\nu(t)$ і $Q_\nu(t)$ — функції Лежандра першого й другого роду відповідно (див. розділ 7.7.). Вимагатимемо обмеженості $\Omega(t)$ на проміжку $t \in [-1; 1]$; виходячи із властивостей функцій Лежандра, це приведе нас до умов

$$\begin{cases} \nu = n, & n = 0, 1, 2, \dots \\ C_2 \equiv 0. \end{cases} \quad (6.75)$$

Отже,

$$\Omega_n(r) = C_{n1} P_n(\cos \theta). \quad (6.76)$$

Перейдемо тепер до розв'язку першого рівняння (6.73) для $R(r)$. З урахуванням (6.75) воно набуде вигляду

$$r^2 R''(r) + 2r R'(r) + (r^2 - n(n + 1)) R(r) = 0.$$

Загальним розв'язком такого рівняння є

$$R(r) = D_{n1} \frac{J_{n+1/2}(r)}{\sqrt{r}} + D_{n2} \frac{N_{n+1/2}(r)}{\sqrt{r}},$$

де $J_\nu(r)$ і $N_\nu(r)$ — функції Бесселя й Неймана (див. розділ 7.6.) відповідно. Знову вимагатимемо обмеженості $R(r)$ у нулі; виходячи із властивостей функції Неймана, така вимога дасть нам умову $D_{n2} \equiv 0$. Отже,

$$R_n(r) = D_{n1} \frac{J_{n+1/2}(r)}{\sqrt{r}}. \quad (6.77)$$

Поєднавши (6.72), (6.76) і (6.77), матимемо

$$u(r, \theta) = A_0 \frac{J_{1/2}(r)}{\sqrt{r}} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \frac{J_{n+1/2}(r)}{\sqrt{r}} P_n(\cos \theta), \quad (6.78)$$

де $A_0 = C_{01} D_{01}$, $A_n = C_{n1} D_{n1}$.

Скористаємося початковою умовою:

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial u}{\partial r} \right|_{r=\pi/2} &= -\sqrt{\frac{2}{\pi}} A_0 J_{3/2}\left(\frac{\pi}{2}\right) + \\ &+ \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sqrt{\frac{8}{\pi^3}} \left(n J_{n+1/2}\left(\frac{\pi}{2}\right) - \frac{\pi}{2} J_{n+3/2}\left(\frac{\pi}{2}\right) \right) P_n(\cos \theta) = \cos \theta. \end{aligned}$$

Звідси одержимо, що

$$A_0 = 0, \quad A_1 \sqrt{\frac{8}{\pi^3}} \left[J_{3/2}\left(\frac{\pi}{2}\right) - \frac{\pi}{2} J_{5/2}\left(\frac{\pi}{2}\right) \right] = 1, \quad A_n = 0, \quad \forall n > 1. \quad (6.79)$$

Властивості функції Бесселя приводять до спрощення:

$$J_{3/2}\left(\frac{\pi}{2}\right) - \frac{\pi}{2} J_{5/2}\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1 - \frac{8}{\pi^2} \Rightarrow A_1 = \sqrt{\frac{\pi^3}{8}} \frac{\pi^2}{\pi^2 - 8}.$$

Підставивши (6.79) і вираз для A_1 в (6.78), остаточно матимемо

$$u(r, \theta) = \frac{\pi^3}{2(\pi^2 - 8)} \frac{\sin r - r \cos r}{r^2} \cos \theta.$$

Завдання для самостійного виконання

Знайти функцію, що задовольняє всередині кулі рівняння Гельмгольца:

$$\begin{aligned} 6.32. \quad & \begin{cases} \Delta u + 4u = 0, & 0 \leq r < 3\pi/4; \\ u(r, \varphi, \theta)|_{r=3\pi/4} = \sin^2 \varphi \cos^2 \theta. \end{cases} & 6.35. \quad & \begin{cases} \Delta u + 16u = 0, & 0 \leq r < 4; \\ \frac{\partial u(r, \varphi, \theta)}{\partial r} \Big|_{r=4} = \sin \varphi + \cos \theta. \end{cases} \\ 6.33. \quad & \begin{cases} \Delta u + 9u = 0, & 0 \leq r < \pi; \\ u(r, \varphi, \theta)|_{r=\pi} = \sin \varphi \cos^3 \theta. \end{cases} & 6.36. \quad & \begin{cases} \Delta u + 25u = 0, & 0 \leq r < 5; \\ \frac{\partial u(r, \varphi, \theta)}{\partial r} \Big|_{r=5} = \sin^2 \theta - \cos \varphi. \end{cases} \\ 6.34. \quad & \begin{cases} \Delta u + 49u = 0, & 0 \leq r < 2\pi/7; \\ u(r, \varphi, \theta)|_{r=2\pi/7} = \sin^3 \varphi \cos \theta. \end{cases} & & \end{aligned}$$

7. Короткий огляд найважливіших спеціальних функцій

7.1. Інтеграл ймовірності

Інтеграл Пуассона визначають як

$$P = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}. \quad (7.1)$$

Із (7.1) випливає, що

$$P(\alpha) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\alpha x^2} dx = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}, \quad (7.2)$$

а n -кратне диференціювання (7.2) за параметром α приводить до такого результату:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x^{2n} e^{-x^2} dx = \left(-\frac{\partial}{\partial \alpha} \right)^n P(\alpha) \Big|_{\alpha=1} = \frac{(2n-1)!!}{2^n} \sqrt{\pi}. \quad (7.3)$$

Інтеграл Пуассона (7.1) є частинний випадок так званої **функції помилок**:

$$\operatorname{erf} x = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-z^2} dz. \quad (7.4)$$

Її значення табульовані. Легко показати, що $\operatorname{erf} \infty = 1$. Крім того, вдаються до функції

$$\operatorname{erfc} x = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_x^{\infty} e^{-z^2} dz = 1 - \operatorname{erf} x. \quad (7.5)$$

7.2. Гамма-функція

Г-функцію Ейлера часто визначають інтегралом, що залежить від параметра:

$$\Gamma(z) = \int_0^{\infty} t^{z-1} e^{-t} dt. \quad (7.6)$$

Вона табульована й має такі властивості:

1) рекурентне співвідношення

$$\Gamma(z+1) = z\Gamma(z); \quad (7.7)$$

2) прості полюси за цілих та негативних z і в нулі;

3) безпосереднє обчислення $\Gamma(1) = 1$, що із застосуванням формули (7.7) дає

$$\Gamma(n) = (n-1)!. \quad (7.8)$$

Деякі важливі інтеграли можна звести до Γ -функції. Так, інтеграл Пуассона може зобразити у вигляді

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-z^2} dz = 2\Gamma\left(\frac{1}{2}\right).$$

Інший інтеграл, важливий у теорії атома водню, отримують із (7.8):

$$\int_0^{\infty} t^n e^{-t} dt = n!. \quad (7.9)$$

Наведену формулу також можна отримати послідовним n -кратним інтегруванням частинами.

7.3. Дельта-функція Дірака

δ -функцію Дірака визначають як ядро «фільтрувального» інтегрального оператора, який ставить у відповідність довільній регулярній функції її значення в нулі:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x) f(x) dx = f(0). \quad (7.10)$$

Визначення (7.10) узагальнюють у тривимірному випадку:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(\mathbf{r}) f(\mathbf{r}) d\mathbf{r} = f(0), \quad (7.11)$$

де в декартових координатах δ -функція векторного аргументу пов'язана з одновимірною δ -функцією простим співвідношенням:

$$\delta(\mathbf{r}) = \delta(x)\delta(y)\delta(z). \quad (7.12)$$

Наведемо основні властивості δ -функції:

1) *парність*: $\delta(-x) = \delta(x)$;

2) *n -а похідна δ -функції є ядро інтегрального оператора, що діє відповідно до правила*:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta^{(n)}(x) f(x) dx = (-1)^n \left. \frac{d^n f(x)}{dx^n} \right|_{x=0};$$

3) *диференційовна функція $g(x)$ в аргументі δ -функції*:

$$\delta(g(x)) = \sum_i \frac{\delta(x - x_i)}{\left| \frac{dg(x)}{dx} \right|_{x=x_i}},$$

де x_i — i -й нуль функції $g(x)$; зокрема, $\delta(\alpha x) = \frac{\delta(x)}{|\alpha|}$;

4) *аналітичні зображення δ -функції*; найпоширенішим є інтегральне зображення:

$$\delta(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ixq} dq \quad (7.13)$$

і три *граничні*:

$$\delta(x) = \lim_{a \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{\pi}a} \exp \left[-\frac{x^2}{a^2} \right]; \quad \delta(x) = \lim_{a \rightarrow 0} \frac{1}{\pi} \frac{a}{x^2 + a^2}; \quad \delta(x) = \lim_{a \rightarrow \infty} \frac{1}{\pi} \frac{\sin ax}{x}.$$

Інтеграл Фур'є (7.13) допускає тривимірне узагальнення:

$$\delta(\mathbf{r}) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int e^{i\mathbf{r}\mathbf{q}} d^3\mathbf{q}. \quad (7.14)$$

7.4. Гіпергеометричне рівняння

Розглянемо диференціальне **рівняння Ейлера**:

$$z(1-z) \frac{d^2 u}{dz^2} + (c - (a+b+1)z) \frac{du}{dz} - abu = 0, \quad (7.15)$$

де параметри a , b і c можуть бути довільними комплексними числами. Коли параметр не становить нуля або від'ємне ціле число ($c \neq 0, -1, -2, \dots$), *регулярний в нулі* розв'язок рівняння Ейлера можна записати через ряд, який називають **гіпергеометричним**:

$${}_2F_1(a, b; c; z) \equiv F(a, b; c; z) = 1 + \frac{ab}{c} \frac{z}{1!} + \frac{a(a+1)b(b+1)}{c(c+1)} \frac{z^2}{2!} + \dots \quad (7.16)$$

Цю функцію відповідно називають **гіпергеометричною (функцією Гаусса)**. На межі $|z| = 1$ ряд збігається абсолютно, якщо дійсна частина суми $a + b - c < 0$, умовно збігається за $z \neq 1$, $0 \leq a + b - c < 1$ і розбіжний, якщо $a + b - c \geq 1$. Другий лінійно незалежний розв'язок диференціального рівняння Ейлера має вигляд

$$z^{1-c} F(b - c + 1, a - c + 1; 2 - c; z). \quad (7.17)$$

Він має особливу точку $z = 0$ і справедливий у разі всіх недодатних c ($c = 0, -1, -2, \dots$).

Інтегральне зображення для гіпергеометричної функції за $\text{Re}[c] > \text{Re}[b] > 0$ (**формула Ейлера**) можна записати у такий спосіб:

$$F(a, b; c; z) = \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(b)\Gamma(c-b)} \int_0^1 t^{b-1} (1-t)^{c-b-1} (1-tz)^{-a} dt, \quad (7.18)$$

де $\Gamma(x)$ — гамма-функція Ейлера (7.6).

Рівняння вигляду

$$x \frac{d^2 y}{dx^2} + (b - x) \frac{dy}{dx} - ay = 0, \quad (7.19)$$

де a і b — задані комплексні параметри, називають **виродженим гіпергеометричним** рівнянням. *Регулярні в нулі* розв'язки (7.19) відповідно називають **виродженою гіпергеометричною функцією** ${}_1F_1(a, b, x)$, зображуваною у вигляді степеневого ряду:

$$y_{\text{reg}}(x) = {}_1F_1(a, b, x) = 1 + \frac{a}{b} \frac{x}{1!} + \frac{a(a+1)}{b(b+1)} \frac{x^2}{2!} + \dots \quad (7.20)$$

За цілих недодатних a ряд перетворюється на поліном степеня $-a$. У разі $|x| \rightarrow \infty$ з урахуванням (7.6) вона має асимптотичний вигляд:

$$\begin{aligned} {}_1F_1(a, b, x) \sim \frac{\Gamma(b)}{\Gamma(b-a)} (-x)^{-a} {}_2F_0(a, a-b+1, -x^{-1}) + \\ + \frac{\Gamma(b)}{\Gamma(a)} e^{-x} x^{a-b} {}_2F_0(b-a, 1-a, x^{-1}), \end{aligned}$$

де

$${}_2F_0(a, b, x) = 1 + ab \frac{x}{1!} + a(a+1)b(b+1) \frac{x^2}{2!} + \dots$$

7.5. Поліноми Чебишова–Ерміта

Регулярними в нулі розв'язками диференціального рівняння

$$y'' - 2xy' + 2ny = 0, \quad n = 0, 1, \dots, \quad (7.21)$$

де n — їх порядок, називають **поліноми Чебишова–Ерміта** $H_n(x)$. Наведемо кілька різних зображень:

- через *формулу Родріга*:

$$H_n(x) = (-1)^n e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n} e^{-x^2}; \quad (7.22)$$

- розвинення за спадними степенями x :

$$H_n(x) = (2x)^n - \frac{n(n-1)}{1}(2x)^{n-2} + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1 \cdot 2}(2x)^{n-4} - \dots;$$

- вироджену гіпергеометричну функцію (7.20):

$$H_{2m}(x) = (-1)^m \frac{(2m)!}{m!} {}_1F_1 \left(-m, \frac{1}{2}, x^2 \right);$$
$$H_{2m+1}(x) = (-1)^m \frac{(2m+1)!}{m!} 2x {}_1F_1 \left(-m, \frac{3}{2}, x^2 \right);$$

Для поліномів Чебишова–Ерміта справедлива рекурентна формула:

$$H_{n+1}(x) = 2xH_n(x) - 2nH_{n-1}(x); \quad H_0(x) = 1; \quad H_1(x) = 2x.$$

7.6. Циліндричні функції

Диференціальне рівняння вигляду

$$x^2 y'' + xy' + (x^2 - \nu^2)y = 0 \quad (7.23)$$

називають **рівнянням Бесселя**, а розв'язки рівняння (7.23) — **циліндричними**, або **бесселевими**, функціями. Тут x — дійсна або комплексна змінна, ν — дійсний або комплексний параметр. Стандартними регулярними в нулі розв'язками рівняння Бесселя є:

- $J_\nu(x)$ — *функція Бесселя* з індексом ν ;
- $N_\nu(x)$ — *функція Неймана* з індексом ν ;

- $H_v^{(1)}(x)$ і $H_v^{(2)}(x)$ — функції Ханкеля 1-го й 2-го роду, відповідно, з індексом v .

Функції $J_v(x)$, $N_v(x)$, $H_v^{(1)}(x)$ і $H_v^{(2)}(x)$ попарно лінійно незалежні. У разі $v \geq 0$ функція $J_v(x)$ обмежена, коли $x \rightarrow +0$, інші циліндричні функції мають при цьому нескінченну границю. За дійсних позитивних значень x і v функції Бесселя й Неймана дійсні.

Явними виразами для функцій Бесселя є:

- розвинення в ряд із застосуванням (7.6):

$$J_v(x) = \left(\frac{x}{2}\right)^v \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\left(-\frac{x^2}{2}\right)^k}{k! \Gamma(v + k + 1)}; \quad (7.24)$$

- зображення через вироджену гіпергеометричну функцію (7.20):

$$J_v(x) = \frac{e^{-iz}}{\Gamma(1+v)} \left(\frac{z}{2}\right)^v {}_1F_1\left(v + \frac{1}{2}, 2v + 1, 2iz\right).$$

Функції Неймана й Ханкеля визначають як

$$\begin{aligned} N_v(x) &= \frac{1}{\sin \pi v} [J_v(x) \cos \pi v - J_{-v}(x)], \quad v \neq 0, \pm 1, \pm 2, \dots \\ H_v^{(1)}(x) &= J_v(x) + i_v(x), \quad H_v^{(2)}(x) = J_v(x) - i_v(x). \end{aligned} \quad (7.25)$$

Із урахуванням формули (7.24) і визначень (7.25) мають місце формули

$$\begin{aligned} J_{\frac{1}{2}}(x) &= \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \sin x, & N_{\frac{1}{2}}(x) &= \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos x, \\ H_{\frac{1}{2}}^{(1)}(x) &= -i \sqrt{\frac{2}{\pi x}} e^{ix}, & H_{\frac{1}{2}}^{(2)}(x) &= i \sqrt{\frac{2}{\pi x}} e^{-ix}, \\ x^{-v} (x^v J_v(x))' &= J_{v-1}(x), & x^v (x^{-v} J_v(x))' &= J_{v+1}(x), \end{aligned}$$

зокрема, $J_0'(x) = -J_1(x)$, $(xJ_1(x))' = xJ_0(x)$. Асимптотика циліндричних функцій за $v > 0$, $x \rightarrow \infty$:

$$\begin{aligned} J_v(x) &= \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \left[\cos \left(x - \frac{\pi v}{2} - \frac{\pi}{4} \right) + O(x^{-1}) \right], \\ N_v(x) &= \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \left[\sin \left(x - \frac{\pi v}{2} - \frac{\pi}{4} \right) + O(x^{-1}) \right], \end{aligned}$$

$$H_v^{(1)}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} e^{i(x - \frac{\pi v}{2} - \frac{\pi}{4})} [1 + O(x^{-1})],$$

$$H_v^{(2)}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} e^{-i(x - \frac{\pi v}{2} - \frac{\pi}{4})} [1 + O(x^{-1})].$$

Сферичну функцію Бесселя

$$j_l(x) = \sqrt{\frac{\pi}{2x}} J_{l+\frac{1}{2}}(x), \quad l = 0, 1, \dots \quad (7.26)$$

виражають через елементарні функції, наприклад,

$$j_0(x) = \frac{\sin x}{x}; \quad j_1(x) = \frac{\sin x}{x^2} - \frac{\cos x}{x}; \quad j_2(x) = \left(\frac{3}{x^3} - \frac{1}{x} \right) \sin x - \frac{3}{x^2} \cos x.$$

Функція Ейрі $\text{Ai}(x)$ є регулярний розв'язок рівняння

$$y'' - xy = 0,$$

що виражається через функції Бесселя порядків $\pm \frac{1}{3}$:

$$\text{Ai}(x) = \frac{1}{3} \sqrt{x} [i_{-\frac{1}{3}}(\zeta) - i_{\frac{1}{3}}(\zeta)]; \quad \text{Ai}(-x) = \frac{1}{3} \sqrt{x} [J_{-\frac{1}{3}}(\zeta) + J_{\frac{1}{3}}(\zeta)], \quad (7.27)$$

де $i_v(\zeta) = i^{-v} J_v(i\zeta)$; $\zeta = \frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}}$.

7.7. Поліноми і функції Лежандра

Розглянемо диференціальне рівняння вигляду

$$(1 - z^2) \frac{d^2 u}{dz^2} - 2z \frac{du}{dz} + n(n+1)u = 0, \quad (7.28)$$

де z — комплексна змінна. Розв'язки цього рівняння у разі цілих n мають вигляд багаточленів, які називають **багаточленами Лежандра**. Поліном Лежандра степеня n можна зобразити через *формулу Родріга* у вигляді

$$P_n(z) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dz^n} (z^2 - 1)^n. \quad (7.29)$$

Рівняння (7.28) можна отримати із частинного випадку гіпергеометричного рівняння, яке називають **рівнянням Лежандра**:

$$(1 - z^2) \frac{d^2 u}{dz^2} - 2z \frac{du}{dz} + \left[l(l+1) - \frac{m^2}{1 - z^2} \right] u = 0, \quad (7.30)$$

де l, M — довільні комплексні сталі. Інтерес становлять його розв'язки, які є однозначні та регулярні за $|z| < 1$ (взагалі за дійсного z) або коли дійсна частина числа z більша за одиницю. Ці розв'язки називають **приєднаними поліномами Лежандра**, які являють собою основні елементи сферичних функцій. Підстановка вигляду $w_1 = (z^2 - 1)^{m/2}$ дає рівняння Гаусса, розв'язок якого в області $|1 - z| < 2$ набуває вигляду

$$w_1 = P_l^m(z) = \frac{1}{\Gamma(1-m)} \left(\frac{z+1}{z-1} \right)^{m/2} F \left(-l, l+1; 1-m; \frac{1}{2} - \frac{z}{2} \right), \quad (7.31)$$

де F — гіпергеометрична функція (7.16). Підстановка $w_2 = z^2$ в (7.30) приводить до розв'язку вигляду

$$w_2 = Q_l^m(z) = e^{mi\pi} 2^{-l-1} \sqrt{\pi} \frac{\Gamma(l+m+1)}{\Gamma(l+3/2)} z^{-l-m-1} (z^2 - 1)^{m/2} \times \\ \times F \left(\frac{l}{2} + \frac{m}{2} + 1, \frac{l}{2} + \frac{m}{2} + \frac{1}{2}; l + \frac{3}{2}; z^{-2} \right), \quad (7.32)$$

визначеного на $|z| > 1$. Функції $P_l^m(z)$ і $Q_l^m(z)$ називають **функціями Лежандра першого і другого роду**. Для них визначено співвідношення

$$P_l^m(z) = P_{-l-1}^m(z); \\ Q_l^m(z) \sin \pi(l+m) - Q_{-l-1}^m(z) \sin \pi(l-m) = \pi e^{im\pi} \cos(l\pi) P_l^m(z).$$

Явний вигляд приєднаних поліномів Лежандра для випадку $l = 0, 1, \dots$, $m = 0, \pm 1, \dots, \pm l$ задають *формулою Родріга*:

$$P_l^{|m|}(x) = \frac{1}{2^l l!} (1-x^2)^{\frac{|m|}{2}} \frac{d^{l+|m|}}{dx^{l+|m|}} (x^2 - 1)^l. \quad (7.33)$$

7.8. Сферичні функції

Приєднані поліноми Лежандра (7.33) входять у структуру **сферичних функцій**:

$$Y_{lm}(\theta, \varphi) = \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi} \frac{(l-|m|)!}{(l+|m|)!}} P_l^{|m|}(\cos \theta) e^{im\varphi}, \quad (7.34)$$

що є регулярні на одиничній сфері розв'язки рівнянь

$$\begin{cases} \left(\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + l(l+1) \right) \Psi(\theta, \varphi) = 0; \\ \left(i \frac{\partial}{\partial \varphi} + m \right) \Psi(\theta, \varphi) = 0 \end{cases}$$

і такі, що утворюють на ній повну ортонормовану систему — базис:

$$\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi Y_{l'm'}^*(\theta, \varphi) Y_{lm}(\theta, \varphi) \sin \theta d\theta = \delta_{l'l} \delta_{m'm}; \quad (7.35)$$

$$\sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l Y_{lm}^*(\theta', \varphi') Y_{lm}(\theta, \varphi) = \delta(\cos \theta' - \cos \theta) \delta(\varphi' - \varphi). \quad (7.36)$$

Сферичні функції задовольняють рекурентне співвідношення

$$\begin{aligned} \cos \theta Y_{lm}(\theta, \varphi) = \\ = \sqrt{\frac{(l+1)^2 - m^2}{(2l+1)(2l+3)}} Y_{l+1,m}(\theta, \varphi) + \sqrt{\frac{l^2 - m^2}{(2l-1)(2l+1)}} Y_{l-1,m}(\theta, \varphi), \end{aligned} \quad (7.37)$$

що являє собою розвинення його лівої частини за базисом сферичних функцій.

Явний вигляд деяких сферичних функцій:

$$Y_{00}(\theta, \varphi) = \frac{1}{\sqrt{4\pi}}; \quad Y_{10}(\theta, \varphi) = \sqrt{\frac{3}{4\pi}} \cos \theta; \quad Y_{1\pm 1}(\theta, \varphi) = \mp \sqrt{\frac{3}{8\pi}} \sin \theta e^{\pm i\varphi}.$$

7.9. Приєднані поліноми Лагерра

Регулярними розв'язками диференціального рівняння

$$xy'' + (\alpha + 1 - x)y' + ny = 0, \quad n = 0, 1, \dots$$

в області $0 \leq x < \infty$ є **приєднані поліноми Лагерра** $L_n^{(\alpha)}(x)$. У разі $\alpha = 0$ вони переходять у звичайні поліноми Лагерра.

Явні зображення для приєднаних поліномів Лагерра:

- через *формулу Родріга*:

$$L_n^{(\alpha)}(x) = \frac{1}{n!} x^{-\alpha} e^x \frac{d^n}{dx^n} [x^{n+\alpha} e^{-x}]; \quad (7.38)$$

- вироджену гіпергеометричну функцію (7.20):

$$L_n^{(\alpha)}(x) = \frac{1}{n!} \frac{\Gamma(n + \alpha + 1)}{\Gamma(\alpha + 1)} {}_1F_1(-n, \alpha + 1, x). \quad (7.39)$$

Список рекомендованої літератури

- Адамян, В.М. Вступ до математичної фізики [Текст] / В.М. Адамян, М.Я. Сушко. – Одеса: Астропринт, 2003. – 320 с.
- Арсенин, В.Я. Методы математической физики и специальные функции [Текст] / В.Я. Арсенин. – Москва: Наука, 1974. – 432 с.
- Бицадзе, А.В. Сборник задач по уравнениям математической физики [Текст] / А.В. Бицадзе, Д.Ф. Калининченко. – Москва: Наука, 1977. – 224 с.
- Бицадзе, А.В. Уравнения математической физики [Текст] / А.В. Бицадзе. – Москва: Наука, 1982. – 336 с.
- Будак, Б.М. Сборник задач по математической физике [Текст] / Б.М. Будак, А.А. Самарский, А.Н. Тихонов. – Москва: Наука, 1980. – 688 с.
- Владимиров, В.С. Уравнения математической физики [Текст] / В.С. Владимиров. – Москва: Наука, 1981. – 512 с.
- Годунов, С.К. Уравнения математической физики [Текст] / С.К. Годунов. – Москва: Наука, 1971. – 416 с.
- Евграфов, М.А. Аналитические функции [Текст] / М.А. Евграфов. – Москва: Наука, 1965. – 471 с.
- Евграфов, М.А. Сборник задач по теории аналитических функций [Текст] / М.А. Евграфов. – Москва: Наука, 1969. – 387 с.
- Маркушевич, А.П. Теория аналитических функций: в 2 т. [Текст] / А.П. Маркушевич. – Москва: Наука, 1968. – Т. 1. – 486 с.; Т. 2. – 624 с.
- Мэтьюз, Дж. Математические методы в физике [Текст] / Дж. Мэтьюз, Р. Уокер. – Москва: Атомиздат, 1972. – 392 с.
- Смирнов, М.М. Задачи по уравнениям математической физики [Текст] / М.М. Смирнов. – Москва: Наука, 1975. – 128 с.
- Тихонов, А.Н. Уравнения математической физики [Текст] / А.Н. Тихонов, А.А. Самарский. – Москва: Изд-во МГУ, 1999. – 799 с.
- Тутік, Р.С. Посібник до самостійної роботи студентів з теорії функцій комплексної змінної [Текст] / Р.С. Тутік, А.М. Турінов. – Дніпро: ДНУ, 2007. – 107 с.
- Уиттекер, Э.Т. Курс современного анализа: в 2 т. [Текст] / Э.Т. Уиттекер, Дж.Н. Ватсон. – Москва: Физматгиз, 1963. – Т. 1. – 343 с.; Т. 2. – 500 с.
- Чудесенко, В.Ф. Сборник задач по специальным курсам высшей математики [Текст] / В.Ф. Чудесенко. – Москва: Высш. шк., 1983. – 112 с.

Зміст

Вступ	3
1. Класифікація лінійних диференціальних рівнянь другого порядку в частинних похідних. Канонічний вигляд	4
1.1. Випадок двох незалежних змінних	6
2. Коротка класифікація основних рівнянь математичної фізики	13
2.1. Рівняння коливань	13
2.2. Процеси розсіювання й дифракції	15
2.3. Процеси дифузії й теплопровідності	16
2.4. Рівняння Лапласа й Пуассона	17
2.5. Рівняння електромагнітних полів	17
2.6. Кінетичні рівняння	18
2.7. Рівняння газо- і гідродинаміки	19
3. Одновимірне хвильове рівняння як найпростіший вид рівнянь гіперболічного типу. Основні принципи	20
3.1. Рівняння струни	20
3.2. Принцип Дюамеля	23
3.3. Рівняння, що описують відбиті хвилі	25
3.4. Коливання струни з вільним кінцем	26
3.5. Умови узгодження	27
3.6. Метод Фур'є для одновимірного хвильового рівняння	28
3.7. Неоднорідне рівняння гіперболічного типу	33
4. Багатовимірне хвильове рівняння. Загальний підхід і види	38
4.1. Формула Пуассона у випадку тривимірного хвильового рівняння	40
4.2. Формула загаяних потенціалів	42
4.3. Формула Кірхгофа	43
4.4. Застосування методу спуску для двовимірного хвильового рівняння	45
4.5. Метод розділення змінних для двовимірного хвильового рівняння	48
5. Рівняння теплопровідності	54
5.1. Одновимірне рівняння теплопровідності	54
5.2. Застосування методу Фур'є для одновимірного рівняння теплопровідності	60
5.3. Метод Фур'є для неоднорідних рівнянь теплопровідності	66

6. Рівняння для стаціонарних розв'язків динамічних задач	73
6.1. Рівняння Пуассона	73
6.2. Метод розділення змінних у випадку двовимірного рівняння Лапласа	74
6.2.1. Розділення змінних у прямокутнику	75
6.2.2. Розділення змінних у колі	76
6.3. Метод розділення змінних для рівняння Лапласа в кулі	87
6.4. Фундаментальні розв'язки рівняння Гельмгольца	94
7. Короткий огляд найважливіших спеціальних функцій	101
7.1. Інтеграл ймовірності	101
7.2. Гамма-функція	101
7.3. Дельта-функція Дірака	102
7.4. Гіпергеометричне рівняння	103
7.5. Поліноми Чебишова–Ерміта	105
7.6. Циліндричні функції	105
7.7. Поліноми і функції Лежандра	107
7.8. Сферичні функції	108
7.9. Приєднані поліноми Лагерра	109
Список рекомендованої літератури	110