

Сборник задач по теоретической физике



1. Кинематика

1.1. (*Кинематика материальной точки*) Одновременно из одного и того же пункта выезжают две автомашины, движущиеся в одном направлении прямолинейно. Зависимость пройденного пути от времени выражается уравнениями: $s_1 = at + bt^2$, $s_2 = ct + dt^2 + et^3$, где a, b, c, d, e — некоторые коэффициенты. Чему равна относительная скорость автомобилей? Определить единицы измерения коэффициентов a, b, c, d, e в системе СИ.

Ответ: $v_0 = (a - c) + 2(b - d)t - 3et^2$

1.2. (*Кинематика материальной точки*) Скорость материальной точки зависит от ее положения в декартовой системе координат следующим образом: $\mathbf{v} = c\mathbf{i} + bx\mathbf{j}$, где c и b — положительные постоянные величины. В начальный момент времени радиус-вектор материальной точки равен нулю: $\mathbf{r}(0) = 0$. Определить:

1. законы движения $\mathbf{r}(t)$, изменения скорости $\mathbf{v}(t)$ и ускорения $\mathbf{a}(t)$;

Ответ: $\mathbf{r}(t) = cti + \frac{cbt^2}{2}\mathbf{j}$, $\mathbf{v}(t) = c\mathbf{i} + cbt\mathbf{j}$, $\mathbf{a}(t) = cb\mathbf{j}$

2. тангенциальную $a_\tau(t)$ и нормальную $a_n(t)$ проекции ускорения;

Ответ: $a_\tau(t) = \frac{cb^2t}{\sqrt{1 + b^2t^2}}$, $a_n(t) = \frac{cb}{\sqrt{1 + b^2t^2}}$

3. уравнение траектории $y(x)$ материальной точки;

Ответ: $y(x) = \frac{bx^2}{2c}$

4. радиус кривизны траектории $\rho(t)$;

Ответ: $\rho(t) = \frac{c}{b}(1 + b^2t^2)^{3/2}$

5. угол $\varphi(t)$ между скоростью $\mathbf{v}(t)$ и ускорением $\mathbf{a}(t)$.

Ответ: $\operatorname{tg} \varphi(t) = \frac{1}{bt}$

1.3. (*Кинематика материальной точки*) Две автомашины движутся по двум взаимно перпендикулярным и прямолинейным дорогам по направлению к перекрестку с постоянными скоростями 50 км/ч и 100 км/ч. В начальный момент времени первая машина находилась на расстоянии 100 км от перекрестка, а вторая — на расстоянии 50 км. Через сколько времени расстояние между ними будет минимальным?

Ответ: 0,8 часа

1.4. (*Кинематика материальной точки*) Определить зависимость пути пройденного телом от времени, если ускорение тела пропорционально квадрату скорости и направлено в сторону, противоположную направлению движения. В начальный момент времени скорость была равна v_0 .

Ответ: $S = S_0 + \frac{1}{k} \ln(kv_0t + 1)$

1.5. (*Кинематика материальной точки*) Находящееся на высоте H над Землей тело бросили горизонтально с начальной скоростью $\mathbf{v}_0(t)$. Найти:

1. закон движения тела;

Ответ: $x = v_0t$, $y = H - \frac{gt^2}{2}$

2. уравнение траектории;

Ответ: $y(x) = H - \frac{gx^2}{2v_0^2}$

3. законы изменения скорости и ускорения;

Ответ: $v = \sqrt{v_0^2 + g^2t^2}$, $a = g$

4. нормальную и тангенциальную проекции ускорения;

Ответ:
$$a_\tau(t) = \frac{g^2 t}{\sqrt{v_0^2 + g^2 t^2}}, \quad a_n(t) = \frac{v_0 g}{\sqrt{v_0^2 + g^2 t^2}}$$

5. радиус кривизны траектории в произвольный момент времени.

Ответ:
$$\rho(t) = \frac{(v_0^2 + g^2 t^2)^{3/2}}{v_0 g}$$

1.6. (*Кинематика материальной точки*) Из пушки, находящейся на самолете, летящем горизонтально со скоростью v_{fl} , выпущен снаряд в направлении движения самолета. Скорость снаряда относительно самолета равна v_s . Пренебрегая сопротивлением воздуха, найти:

1. уравнение траектории снаряда относительно Земли $y(x)$;

Ответ:
$$y = -\frac{g}{2(v_{fl} + v_s)^2} x^2$$

2. уравнение траектории снаряда относительно самолета $y'(x')$;

Ответ:
$$y' = -\frac{g}{2v_s^2} (x')^2$$

3. уравнение траектории самолета относительно снаряда $y''(x'')$.

Ответ:
$$y'' = \frac{g}{2v_s^2} (x'')^2, \quad x'' < 0$$

Оси X , X' и X'' декартовой системы координат направлены горизонтально вдоль скорости самолета, а оси Y , Y' и Y'' — вертикально вверх, при этом начало координат системы $X'Y'$ совпадает с положением самолета в момент выстрела пушки.

1.7. (*Кинематика материальной точки*) Два тела начали свободно падать с одной и той же высоты, одно вслед за другим через интервал времени τ . Через какое время t , считая от начала падения первого тела, расстояние между телами будет равно l ?

Ответ:
$$t = \frac{l}{g\tau} - \frac{\tau}{2}$$

1.8. (*Кинематика материальной точки и принцип суперпозиции движений*) Лодка пересекает реку с постоянной относительно воды скоростью v , перпендикулярной направлению течения реки. Модуль скорости течения реки, ширина которой d , нарастает от берегов к середине реки по параболическому закону, изменяясь от 0 до u_m . Найти уравнение траектории лодки, время ее движения τ , а также снос лодки l вниз по течению от места ее отплытия до места причаливания на противоположном берегу реки.

Ответ:
$$x(y) = \frac{4u_m}{3vd^2} \left(-y^3 + \frac{3}{2}y^2d \right), \quad \tau = \frac{d}{v}, \quad l = x(\tau) = \frac{2u_m}{3v}d$$

1.9. (*Кинематика материальной точки и принцип суперпозиции движений*) Лодка пересекает реку шириной d с постоянной относительно воды скоростью \mathbf{v} , перпендикулярной скорости течения реки, модуль которой нарастает от берегов к середине реки по линейному закону, меняясь от 0 до u . Найти:

1. траекторию лодки;

Ответ:
$$y = \sqrt{\frac{vd}{u}}x, \quad \text{при } y < \frac{d}{2}; \quad y = d - \sqrt{\frac{d^2}{2} - \frac{vd}{u}}x, \quad \text{при } y > \frac{d}{2}$$

2. снос лодки l вниз по течению от места ее отплытия до места причаливания на противоположном берегу реки.

Ответ: $l = \frac{ud}{2v}$

Ось X декартовой системы координат XU направлена вдоль берега реки, а ось Y — поперек реки. Начало системы координат, жестко связанной с берегом реки, совпадает с местом отплытия лодки.

1.10. Скорость течения реки по ее ширине меняется по закону $v_p(x) = a(d-x)x + c$, где a — некоторый коэффициент; d — ширина реки; c — коэффициент, определяющий скорость течения у берегов; x — текущее расстояние лодки от берега. На какое расстояние снесет лодку течением при переправе, если скорость ее относительно воды равна v_0 и направлена прямо к противоположному берегу?

Ответ: $S = \frac{d}{v_0} \left(c + \frac{ad^2}{6} \right)$

1.11. (*Принцип суперпозиции движений*) По движущемуся вниз эскалатору спускается пассажир со скоростью v относительно эскалатора. Скорость эскалатора равна u . Спускаясь по неподвижному эскалатору пассажир проходит N ступеней. Сколько ступеней N' пройдет пассажир, спускаясь по движущемуся эскалатору?

Ответ: $N' = \frac{v}{v+u} N$

1.12. (*Принцип суперпозиции движений*) Определить форму траектории капель дождя на боковом стекле трамвая, движущегося горизонтально со скоростью v_1 , во время его торможения с ускорением a . Капли дождя падают на землю вертикально вниз, и скорость их относительно земли постоянна и равна v_2 .

Ответ: $x' = \frac{v_1}{v_2} y' - \frac{a}{2v_2^2} y'^2$

1.13. (*Принцип суперпозиции движений*) На наклонную плоскость, расположенную под углом $\alpha = 30^\circ$ к горизонту, с высоты $h = 25$ см падает шарик. Определить соотношение расстояний по наклонной плоскости между точками первого, второго и третьего ударов. Удары считать абсолютно упругими.

Ответ: $S_1 : S_2 : S_3 : \dots = 1 : 2 : 3 : \dots$

1.14. (*Уравнения кинематической связи*) Концы твердого стержня могут свободно скользить по сторонам прямого угла. Найти уравнение траектории точки P стержня, которая делит его на части длиной a и b .

Ответ: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

1.15. (*Кинематика простейших механических систем*) На вал радиуса R , закрепленный на оси, намотана веревка, на конце которой висит груз, опускающийся вниз. Закон движения груза: $x = x_0 + bt^2$, где x_0 и b — постоянные положительные величины. Определить:

1. угловые скорость ω и ускорение β произвольной точки обода вала;

Ответ: $\omega = \frac{2bt}{R}, \beta = \frac{2b}{R}$

2. модуль ускорения a , тангенциальную $a_\tau(t)$ и нормальную $a_n(t)$ проекции ускорения;

Ответ: $a_\tau(t) = 2b, a_n(t) = \frac{4b^2 t^2}{R}, a(t) = 2b \sqrt{\frac{4b^2 t^4}{R^2} + 1}$

3. записать закон движения этой точки.

Ответ: $\varphi(t) = \varphi_0 + \frac{bt^2}{R}$

1.16. (На кинематику материальной точки) Две точки M_1 и M_2 движутся по одной окружности в одну сторону согласно уравнениям $s_1 = 8 + 2t^2$ и $s_2 = t^4$, где путь s выражен в сантиметрах, а время t — в секундах. Началом отсчета расстояний s_1 и s_2 служит одна точка. Определить время первой встречи обеих точек и значения их скоростей и ускорений в этот момент, если радиус окружности $R = 16$ см.

Ответ: $v_1 = 8$ см/с, $v_2 = 32$ см/с, $a_1 = 4\sqrt{2}$ см/с², $a_2 = 80$ см/с², $\alpha_1 = 45^\circ$, $\alpha_2 \approx 53^\circ$

1.17. (На кинематику материальной точки) Закон движения движущейся в плоскости материальной точки, заданный в полярной системе координат, имеет следующий вид: $r = r(t)$, $\varphi = \varphi(t)$. Определить законы изменения проекций скорости и ускорения материальной точки на направления, задаваемые осями декартовой и полярной систем координат, жестко связанных с телом отсчета. Начало декартовой системы координат совпадает с полюсом полярной системы, а ось X декартовой системы направлена вдоль полярной оси.

Ответ: $v_r = \dot{r}$, $v_\varphi = r\dot{\varphi}$, $a_r = \ddot{r} - r\dot{\varphi}^2$, $a_\varphi = 2\dot{r}\dot{\varphi} + r\ddot{\varphi}$

1.18. (На кинематику материальной точки) Движение материальной точки в полярной системе координат задается взаимосвязью полярных координат $r(\varphi) = 2a(1 + \cos \varphi)$, при этом полярный угол возрастает линейно во времени $\varphi(t) = bt$. Определить зависимость модуля скорости и модуля ускорения материальной точки от времени.

Ответ: $v = 2ab\sqrt{2 + 2\cos(bt)}$, $a = 2ab^2\sqrt{5 + 4\cos(bt)}$

1.19. (На кинематику материальной точки) Планета движется вокруг Солнца в соответствии с законами Кеплера по эллиптической траектории $r(1 - e \cos \varphi) = p$. Параметр эллипса p , эксцентриситет e и секторную скорость σ считать заданными. Определить проекции ускорения планеты в зависимости от координат r и φ полярной системы.

Ответ: $a_r = -\frac{4\sigma^2}{r^2p}$, $a_\varphi = 0$

1.20. (На кинематику материальной точки) При вращении махового колеса его угловое ускорение изменялось по закону $\varepsilon = a - b\omega$, где a и b — некоторые коэффициенты. Чему будет равна угловая скорость маховика через t секунд после начала торможения, если перед торможением она была ω_0 ?

Ответ: $\omega = \frac{a}{b} - \left(\frac{a}{b} - \omega_0\right)e^{-bt}$

1.21. (На кинематику материальной точки) Материальная точка движется по закону $\mathbf{r} = \alpha \sin(5t)\mathbf{i} + \beta \cos^2(5t)\mathbf{j}$, где $\alpha = 2$ м, $\beta = 3$ м. Определить вектор скорости, вектор ускорения и траекторию движения материальной точки.

Ответ: $y = 3 - \frac{3}{4}x^2$

1.22. (На кинематику материальной точки) Небольшое тело движется по гладкой внутренней поверхности полого вертикального цилиндра радиуса R . В начальный момент времени скорость тела направлена перпендикулярно оси цилиндра и равна v_0 . Определить:

1. законы изменения скорости и ускорения материальной точки в цилиндрической системе координат;

2. угол $\alpha(t)$ между скоростью и ускорением.

Ответ: $\cos \alpha = \frac{g^2 t}{\sqrt{(v_0^2 + g^2 t^2) \left(\frac{v_0^4}{R^2} + g^2\right)}}$

2. СТО

2.1. Система отсчета «ракета» движется вдоль оси OX инерциальной оси отсчета «Земля» с постоянной скоростью $v = 2 \cdot 10^8$ м/с. В системе отсчета «Земля» расположен стержень длиной $l_0 = 1$ м под углом $\alpha_0 = 45^\circ$ к оси OX . Найти длину стержня и угол наклона его оси OX' в системе отсчета «ракета». Оси OX и OX' параллельны.

Ответ: $l = 88$ м, $\alpha \approx 53,3^\circ$

2.2. Сколько времени для земного наблюдателя и для космонавтов займет космическое путешествие до звезды и обратно на ракете, летящей со скоростью $v = 2,9 \cdot 10^8$ м/с? Расстояние до звезды (для земного наблюдателя) равно 40 световым годам.

Ответ: $\Delta t \approx 83$ года, $\Delta t_0 \approx 21,3$ года

2.3. В системе отсчета K два параллельных стержня имеют одинаковую собственную длину $l_0 = 1$ м и движутся в продольном направлении навстречу друг к другу с равными скоростями $v = 2 \cdot 10^8$ м/с, измеренным в этой системе отсчета. Чему равна длина каждого стержня в системе отсчета, связанной с другим стержнем?

Ответ: $l \approx 38$ см

2.4. При движении тела его продольные размеры уменьшились в $n = 2$ раза. Во сколько изменилась масса тела?

Ответ: масса тела увеличилась в 2 раза

2.5. Масса Солнца равна $= 1,99 \cdot 10^{30}$ кг. Солнце в течении года излучает энергию $E = 12,6 \cdot 10^{23}$ Дж. За какое время масса Солнца уменьшится вдвое?

Ответ: $t \approx 7,1 \cdot 10^{12}$ лет

2.6. Электрон движется со скоростью $v = 0,9$. Вычислить в процентах, какая ошибка будет сделана, если кинетическую энергию частицы определять по формуле классической механики.

Ответ: $\eta \approx 0,69$

2.7. На космическом корабле-спутнике находятся часы, синхронизированные до полета с земными. Скорость спутника составляет 7,9 км/с. На сколько отстанут часы на спутнике по измерениям земного наблюдателя по своим часам за время 0,5 года?

Ответ: 0,57

2.8. Лодочник под мостом уронил в воду багор. Через время τ , находясь на расстоянии L от моста, он обнаружил потерю и, повернув назад, догнал багор на расстоянии l от моста. Время и расстояние приведены в системе «берег». Какова скорость реки? Получите релятивистский ответ и из него нерелятивистское приближение.

Ответ: $v = \frac{L\tau c^2}{l(l+2L)} \left(\sqrt{1 + \frac{l^3(l+2L)}{(L\tau c)^2}} - 1 \right), v = \frac{l^2}{2L\tau}$

2.9. Фотонная ракета движется относительно Земли со скоростью $v = 0,6c$. Во сколько раз замедлится ход времени в ракете с точки зрения земного наблюдателя?

Ответ: 1,25 раз

2.10. В системе K находится квадрат, сторона которого параллельна оси OX' . Определить угол ϕ между его диагоналями в системе K , если система K' движется относительно K со скоростью $v = 0,95c$.

Ответ: $\phi = 72^\circ 66'$

2.11. С космического корабля, удаляющегося от Земли со скоростью $0,66c$, под прямым углом к направлению полета (с точки зрения наблюдателя, находящегося на борту корабля) запущен беспилотный модуль со скоростью $0,82c$. Чему равна скорость модуля и под каким углом к направлению движения первого космического корабля он летит с точки зрения наблюдателя на Земле?

Ответ: $0,9c, 93^\circ$

2.12. Ион, вылетев из ускорителя, испустил фотон в направлении своего движения. Определить скорость фотона относительно ускорителя, если скорость v иона относительно ускорителя равна $0,8c$. Ответ: \boxed{c}

2.13. Два ускорителя выбрасывают навстречу друг другу частицы со скоростями $|v| = 0,9c$. Определить относительную скорость сближения частиц в системе отсчета, движущейся вместе с одной из частиц. Ответ: $\boxed{0,994c}$

2.14. Масса Солнца ежесекундно уменьшается на $\Delta m = 4 \cdot 10^6$ т/с. Какое количество энергии излучает Солнце за 1 ч? Какое количество гидроэлектростанций мощностью $N = 2,1 \cdot 10^6$ Вт могло бы выбрасывать столько же энергии за час? Ответ: $\boxed{1,3 \cdot 10^{30} \text{ Дж}, 1,7 \cdot 10^{17}}$

2.15. С какой скоростью и движется частица, если ее релятивистская масса в три раза больше массы покоя? Ответ: $\boxed{0,943c}$

2.16. На сколько процентов релятивистская масса частицы больше массы покоя при скорости $v = 30$ Мм/с? Ответ: $\boxed{0,5\%}$

2.17. В лабораторной системе отсчета одна из двух одинаковых частиц покоится, другая движется со скоростью $v = 0,8c$ по направлению к покоящейся частице. Определить:

1. релятивистскую массу движущейся частицы в лабораторной системе отсчета; Ответ: $\boxed{1,67 m_0}$
2. скорость частиц в системе отсчета, связанной с центром инерции системы; Ответ: $\boxed{0,5c}$
3. релятивистскую массу частиц в системе отсчета, связанной с центром инерции. Ответ: $\boxed{1,15 m_0}$

2.18. Определить, на сколько должна увеличиться полная энергия тела, чтобы его релятивистская масса возросла на $\Delta m = 1$ г? Ответ: $\boxed{90 \text{ ТДж}}$

2.19. Известно, что объем воды в океане равен $1,37 \cdot 10^9$ км³. Определить, на сколько возрастет масса воды в океане, если температура воды повысится на $\Delta t = 1^\circ$. Плотность воды в океане принять равной $1,03 \cdot 10^3$ кг/м³. Ответ: $\boxed{6,57 \cdot 10^7 \text{ кг}}$

2.20. Во сколько раз релятивистская масса протона больше релятивистской массы электрона, если обе частицы имеют одинаковую кинетическую энергию $T = 1$ ГэВ? Ответ: $\boxed{1,94}$

2.21. При какой скорости v кинетическая энергия любой частицы вещества равна ее энергии покоя? Ответ: $\boxed{2,6 \cdot 10^8 \text{ м/с}}$

2.22. Две релятивистские частицы движутся навстречу друг другу с одинаковыми (в лабораторной системе отсчета) кинетическими энергиями, равными их энергии покоя. Определить:

1. скорости частиц в лабораторной системе отсчета; Ответ: $\boxed{0,866c}$
2. относительную скорость сближения частиц (в единицах c); Ответ: $\boxed{0,9897c}$
3. кинетическую энергию одной из частиц в системе отсчета, связанной с другой частицей. Ответ: $\boxed{6m_0c^2}$

2.23. Кинетическая энергия релятивистской частицы равна ее энергии покоя. Во сколько раз возрастет импульс частицы, если ее кинетическая энергия увеличится в 4 раза? Ответ: $\boxed{2,82}$

2.24. Частица с кинетической энергией $T = m_0c^2$ налетает на другую такую же частицу, которая в лабораторной системе отсчета покоится. Найти суммарную кинетическую энергию T' частиц в системе отсчета, связанной с центром инерции системы частиц.

Ответ: $0,511m_0c^2$

2.25. Через какое время фотон перелетит галактику диаметром 10^5 световых лет по наблюдениям с космического корабля, движущегося вслед за фотонами со скоростью, равной 0,6?

Ответ: 50000 лет