

ЭЛЕКТРОДИНАМИКА

(основная часть)

1. Введение в электродинамику. Электромагнитное поле, электрический заряд.

1.1. Введение

Электромагнитное взаимодействие является одним из четырех типов фундаментальных взаимодействий. В силу того, что оно обладает достаточно большой интенсивностью и бесконечным радиусом действия, электромагнитное взаимодействие проявляется на всех уровнях организации материи: макроскопический и микроскопический уровни. Согласно этому электродинамику подразделяют на классическую электродинамику и квантовую электродинамику. В данном курсе рассматривается классическая электродинамика, т.е. данная теория не является квантовой теорией.

Основной характеристикой, определяющей способность тела (частицы) участвовать в электромагнитном взаимодействии, является электрический заряд. Осуществляется взаимодействие между частицами посредством электромагнитного поля. Таким образом, основной физической системой, которая изучается в электродинамике, является система, состоящая из заряженных частиц и электромагнитного поля, взаимодействующих между собой – заряженные частицы являются источниками поля и испытывают воздействие со стороны поля.

Описание состояния и эволюции такой системы является задачей электродинамики. Здесь следует различать два случая.

1. Расположение и движение заряженных частиц известно. Оно задается с помощью переменных состояния частиц – плотность распределения электрического заряда и плотность тока, которые выступают в качестве параметров. Состояние электромагнитного поля описывается с помощью векторных функций – электрическое поле $\vec{E}(\vec{r}, t)$ и магнитное поле $\vec{B}(\vec{r}, t)$. Основная задача электродинамики в этом случае ставится следующим образом: по заданному распределению и движению электрических зарядов найти состояние электромагнитного поля, т.е. функции $\vec{E}$ и $\vec{B}$. Данная задача решается с помощью уравнений Максвелла, описывающих электромагнитное поле в вакууме.

2. Электромагнитное поле в веществе. В данном случае число заряженных частиц велико и они сами испытывают воздействие со стороны электромагнитного поля, т.е. состояние частиц не является заданным и подвержено влиянию электромагнитного поля. Динамические уравнения, описывающие поведение таких систем, строятся на основе целого ряда определенных приближений и заведомо имеют ограниченную область применения.

Рассмотрение электродинамики целесообразно начать с решения первой задачи – описание электромагнитного поля в вакууме (первая часть курса). Затем, перейти к рассмотрению электромагнитного поля в веществе (вторая часть курса).

1.2. Электрический заряд.

Электрический заряд является внутренней характеристикой частицы и определяет интенсивность электромагнитного взаимодействия.

Первое утверждение означает, что значение величины электрического заряда частицы не зависит от состояния частицы. В частности, отсюда следует, что величина электрического заряда является инвариантом преобразований Лоренца, т.к. переход от одной инерциальной системы отсчета к другой не меняет внутреннее состояние частицы. В этом он подобен массе частицы, которая выступает в качестве внутренней характеристики частицы, определяющей способность частицы участвовать в гравитационном взаимодействии. Гравитационное взаимодействие всегда носит характер притяжения. Это находит отражение в том, что масса частицы является знакоопределенной величиной, не отрицательна. Электромагнитное взаимодействие может носить как характер притяжения, так и отталкивания. Это зависит от вида частиц, участвующих во взаимодействии, т.е. от электрических характеристик частиц, их зарядов. Опыт показывает, что заряженные частицы одного рода всегда отталкиваются, между частицами разного рода может осуществляться либо притяжение, либо отталкивание. В согласии с этим одним частицам приписывается положительный электрический заряд,

другим отрицательный. Выбор знака заряда является произвольным. Электрический заряд электрона считается отрицательным. Т.к. электрон и протон притягиваются друг к другу, то протону следует приписать положительный электрический заряд. Все частицы, которые электрически отталкиваются от электрона, имеют отрицательный заряд; которые притягиваются к электрону – положительный электрический заряд. Если поменять у всех частиц знаки электрических зарядов на противоположные, то характер электромагнитного взаимодействия при этом не изменился бы. Электромагнитное взаимодействие является инвариантным по отношению к данной операции. Величина электрического заряда является истинным скаляром. На самом деле, при операции пространственной инверсии внутреннее состояние частицы не меняется, при этом не меняется и величина электрического заряда.

Электрический заряд нейтрона и ряда других частиц равен нулю. Электрически нейтральные частицы способны принимать участие в электромагнитном взаимодействии, но в этом случае взаимодействие осуществляется благодаря наличию у частиц векторных или тензорных внутренних характеристик (дипольный магнитный момент и др.). Такое взаимодействие присуще и заряженным частицам, но оно мало в сравнении с «обычным» взаимодействием, определяемым величиной электрического заряда.

Следующим свойством электрического заряда является его *аддитивность*: электрический заряд системы заряженных частиц равен алгебраической сумме электрических зарядов частиц системы

$$q = \sum_a q_a . \quad (1.1)$$

Для массы свойство аддитивности имеет место в нерелятивистском случае. При релятивистских скоростях закон аддитивности массы нарушается.

Электрический заряд является *кратной величиной*. Это означает, что величина электрического заряда частицы

$$q = k e ,$$

где e - элементарный электрический заряд, k - целое число. Элементарный заряд равен заряду протона (для протона $k=1$). Заряд электрона, отличается от заряда протона только знаком (для электрона $k=-1$). (Кварки имеют дробный электрический заряд в единицах элементарного заряда, но они не встречаются в свободном состоянии.)

Электрический заряд является мерой интенсивности электромагнитного взаимодействия. Это означает, что электромагнитную силу, действующую на электрический заряд (электрически заряженную частицу) можно записать в виде

$$\vec{F}_a = q_a \vec{f}(\vec{r}, t, \vec{v}_a), \quad (1.2)$$

где $\vec{v}_a$ - скорость частицы, $\vec{f}$ - некоторая векторная функция (в формуле (1.2) мы не учитываем наличие у частиц внутренних векторных электрических характеристик и пренебрегаем эффектами запаздывания, которые требуют отдельного рассмотрения).

1.3. Плотность распределения электрического заряда. Плотность тока.

Распределение электрического заряда в пространстве описывается функцией объемной плотности распределения электрического заряда

$$\rho(\vec{r}, t) = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\Delta q}{\Delta V} = \frac{dq}{dV} . \quad (1.3)$$

Рассмотрим случай точечного электрического заряда q_a , расположенного в точке $\vec{r} = \vec{r}_a$ в момент времени t . Функции плотности распределения заряда

$$\rho_a(\vec{r}, t) = \begin{cases} 0, & \vec{r} \neq \vec{r}_a \\ \infty, & \vec{r} = \vec{r}_a \end{cases} . \quad (1.4)$$

Данную функцию можно записать через дельта-функцию следующим образом

$$\rho_a(\vec{r}, t) = q_a \delta(\vec{r} - \vec{r}_a(t)) . \quad (1.5)$$

На самом деле, интегрируя по всему пространству и используя определение дельта-функции, получим

$$\int \rho_a(\vec{r}, t) dV = q_a \int \delta(\vec{r} - \vec{r}_a(t)) dV = q_a, \quad (1.6)$$

т.е. полный заряд системы.

Для случая системы нескольких зарядов

$$\rho(\vec{r}, t) = \sum_a q_a \delta(\vec{r} - \vec{r}_a(t)) \quad , \quad \int \rho(\vec{r}, t) dV = \sum_a q_a = q.$$

Для описания движения электрического заряда в пространстве вводят функцию плотности тока

$$\vec{j}(\vec{r}, t) = \rho(\vec{r}, t) \vec{v}(\vec{r}, t) \quad , \quad (1.7)$$

где $\vec{v}(\vec{r}, t)$ - скорости частиц пролетающих через точку $\vec{r}$ пространства в разные моменты времени t , т.е. нестационарное (в общем случае) векторное поле скоростей.

Плотность тока точечного электрического заряда

$$\vec{j}_a(\vec{r}, t) = q_a \vec{v}_a(t) \delta(\vec{r} - \vec{r}_a(t)) \quad (1.8)$$

и системы точечных зарядов

$$\vec{j}(\vec{r}, t) = \sum_a q_a \vec{v}_a(t) \delta(\vec{r} - \vec{r}_a(t)) \quad . \quad (1.9)$$

Модуль вектора плотности тока численно равен электрическому заряду, протекающему за единицу времени через единичную площадку, перпендикулярную вектору скорости в данной точке пространства в данный момент времени. Величина

$$J = \int_S \vec{j} d\vec{S} \quad (1.10)$$

называется электрическим током – заряд, протекающий через поверхность S за единицу времени.

Рассмотрим участок линейного проводника (рис. 1.1) с током J .

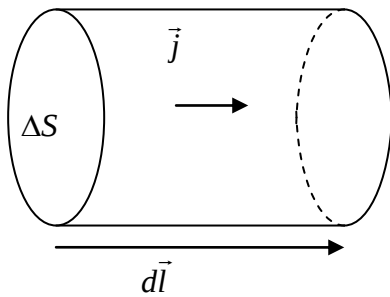


Рис. 1.1

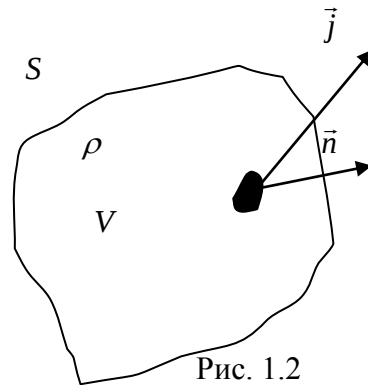


Рис. 1.2

Величину $J d\vec{l}$ называют элементом тока. Очевидно,

$$J d\vec{l} = j \Delta S d\vec{l} = \vec{j} dV = \rho \vec{v} dV = \vec{v} dq \quad . \quad (1.11)$$

1.4. Закон сохранения электрического заряда.

Данный закон формулируется следующим образом: полный электрический заряд замкнутой физической системы сохраняется. Закон сохранения электрического заряда следует считать обобщением экспериментальных фактов.

В электродинамике данный закон удобно формулировать в виде уравнения непрерывности. Для вывода данного уравнения рассмотрим электрический заряд с плотностью ρ в объеме V , который ограничен поверхностью S (рис. 1.2).

Скорость изменения заряда q в фиксированном объеме V определяется зарядом, протекающем через неподвижную поверхность S за единицу времени, т.е. током через данную поверхность:

$$\frac{dq}{dt} = -J \quad . \quad (1.12)$$

Знак минус показывает, что со временем заряд в фиксированном объеме при заданном направлении тока убывает. Формулу (1.12) с учетом формулы (1.10) и формулы

$$q_v(t) = \int_V \rho(\vec{r}, t) dV \quad (1.13)$$

можно записать в виде

$$\frac{d}{dt} \int_V \rho dV = - \oint_S \vec{j} d\vec{S} . \quad (1.14)$$

Величина заряда в формуле (1.13) есть только функция времени, а плотность заряда есть функция времени и пространственных координат. Меняя местами операции дифференцирования по времени и интегрирования по пространственным координатам в левой части формулы (1.14), мы должны полную производную заменить частной производной по времени:

$$\int_V \frac{\partial \rho}{\partial t} dV = - \oint_S \vec{j} d\vec{S} = - \int_V \text{div } \vec{j} dV .$$

В последнем преобразовании мы использовали теорему Гаусса. Итак:

$$\int_V \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div } \vec{j} \right) dV = 0 .$$

Поскольку объем V является произвольным, то данное равенство будет выполнено, если подынтегральное выражение равно нулю. Таким образом,

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div } \vec{j} = 0 . \quad (1.15)$$

Формула (1.15) называется уравнением непрерывности и выражает закон сохранения электрического заряда в дифференциальной форме.

2. Характеристики электромагнитного поля. Сила Лоренца.

2.1. Характеристики электромагнитного поля. Сила Лоренца.

Характеристики электромагнитного поля вводятся по его воздействию на движущийся электрический заряд (заряженную частицу). Электромагнитная сила, действующая на заряд, является функцией величины заряда частицы, скорости частицы, пространственных координат и времени:

$$\vec{F}_a = \vec{F}_a(\vec{r}, t, q_a, \vec{v}_a) . \quad (2.1)$$

Используя определение электрического заряда, формулу (2.1) можно записать в виде:

$$\vec{F}_a = q_a \vec{f}(\vec{r}, t, \vec{v}_a) . \quad (2.2)$$

Тем самым, для введения характеристик поля, которые должны быть функциями координат и времени, нам необходимо рассмотреть зависимость электромагнитной силы от скорости движения электрического заряда. Электромагнитную силу (2.2) можно разбить на два слагаемых. Первое слагаемое не зависит от скорости движения частицы и называется электрической силой. Второе слагаемое зависит от скорости и называется магнитной силой. Полную электромагнитную силу (2.2) – силу Лоренца – можно представить в виде:

$$\vec{F}_a = \vec{F}_{el}(\vec{r}, t, q_a) + \vec{F}_m(\vec{r}, t, q_a, \vec{v}_a) = q_a \vec{E}(\vec{r}, t) + \frac{q_a}{c} [\vec{v}_a, \vec{B}(\vec{r}, t)] . \quad (2.3)$$

Векторные функции $\vec{E}(\vec{r}, t)$ и $\vec{B}(\vec{r}, t)$ называются электрическим полем (напряженность) и магнитным полем (индукция). Данные функции полностью определяют состояние электромагнитного поля: знание этих функций позволяет найти электромагнитную силу, действующую на частицу и определить закон ее движения. Для определения электрического поля достаточно измерить силу, действующую на неподвижный электрический заряд. Для определения магнитного поля необходимо измерить полную силу Лоренца, а затем определить магнитную силу через разность полной силы Лоренца и электрической силы.

В формулу (2.3) введена фундаментальная постоянная c – скорость света в вакууме. При этом функции электрического и магнитного полей имеют единую размерность (мы

используем систему единиц СГС). Электрическое поле является истинным вектором, магнитное поле – псевдовектор.

2.2. Плотность и мощность силы Лоренца. Сила Ампера.

Рассмотрим силу Лоренца, действующую на электрический заряд dq в объеме пространства dV . Для этого используем соотношения

$$dq = \rho dV, \quad dq\vec{v} = \rho\vec{v}dV = \vec{j}dV. \quad (2.4)$$

Подставляя формулы (2.4) в выражение для силы Лоренца, действующей на электрический заряд в объеме dV , получим:

$$d\vec{F} = \left\{ \rho\vec{E} + \frac{1}{c}[\vec{j}, \vec{B}] \right\} dV. \quad (2.5)$$

Чтобы получить суммарную силу Лоренца, надо проинтегрировать последнее выражение по объему пространства, где находятся заряженные частицы, т.е.

$$\vec{F} = \int_V \left\{ \rho\vec{E} + \frac{1}{c}[\vec{j}, \vec{B}] \right\} dV = \int_V \vec{f} dV. \quad (2.6)$$

Здесь функция

$$\vec{f} = \rho\vec{E} + \frac{1}{c}[\vec{j}, \vec{B}] \quad (2.7)$$

называется плотностью силы Лоренца. Это есть электромагнитная сила, действующая на единицу объема пространства, в котором сосредоточен электрический заряд ρ и ток $\vec{j}$.

Ниже будет показано, что можно перейти в такую систему отсчета, в которой одно из полей $\vec{E}$ или $\vec{B}$ можно обратить в нуль. В этом случае говорят о чисто электрическом поле или о чисто магнитном поле. Пусть электромагнитное поле является чисто магнитным.

Определим силу, действующую на элемент тока $J d\vec{l}$ со стороны магнитного поля:

$$d\vec{F} = \frac{1}{c}[\vec{j}, \vec{B}]dV = \frac{J}{c}[\vec{dl}, \vec{B}]. \quad (2.8)$$

Данная формула является законом Ампера, записанном в векторной форме.

Вычислим работу силы Лоренца за единицу времени, т.е. мощность силы Лоренца

$$P = (\vec{v}, \vec{F}) = q(\vec{v}, \vec{E}). \quad (2.9)$$

Магнитная часть силы Лоренца перпендикулярна скорости движения электрического заряда и ее работа (мощность) равна нулю. Плотность мощности силы Лоренца

$$p = (\vec{j}, \vec{E}) \quad (2.10)$$

- работа за единицу времени в единице объема.

2.3. Преобразование электромагнитного поля при переходе от одной инерциальной системы отсчета к другой.

Рассмотрим, как преобразуются электрическое и магнитное поля при переходе от одной инерциальной системы отсчета к другой. Пусть одна из инерциальных систем отсчета движется относительно другой со скоростью $\vec{V}$. Пусть в первой системе отсчета электрическое поле есть $\vec{E}$ и магнитное поле $\vec{B}$, заряд частицы q и скорость ее движения $\vec{v}$. В данной системе отсчета на частицу действует электромагнитная сила

$$\vec{F} = q\vec{E} + \frac{q}{c}[\vec{v}, \vec{B}]. \quad (2.11)$$

Во второй системе отсчета на данную частицу действует сила

$$\vec{F}' = q'\vec{E}' + \frac{q'}{c}[\vec{v}', \vec{B}']. \quad (2.12)$$

Скорость движения частицы будем считать малой, и для преобразования скорости используем классический закон сложения скоростей $\vec{v} = \vec{v}' + \vec{V}$. Сила и электрический заряд являются инвариантами преобразований Галилея: $q = q'$, $\vec{F} = \vec{F}'$. Пусть во второй системе

отсчета частица покоится: $\vec{v}' = 0$. С учетом этого из формул (2.11) и (2.12) находим закон преобразования электрического поля

$$\vec{E}' = \vec{E} + \frac{1}{c} [\vec{V}, \vec{B}]. \quad (2.13)$$

Формула преобразования магнитного поля выглядит следующим образом:

$$\vec{B}' = \vec{B} - \frac{1}{c} [\vec{V}, \vec{E}]. \quad (2.14)$$

Из последних двух формул видно, что можно всегда подобрать такую систему отсчета, в которой или электрическое поле или магнитное поле обращается в нуль. Если в одной из систем отсчета поле является, например, чисто электрическим, $\vec{B} = 0$, то в другой системе отсчета наряду с электрическим полем $\vec{E}' = \vec{E}$ появляется магнитное поле $\vec{B}' = -\frac{1}{c} [\vec{V}, \vec{E}]$ и, наоборот. Таким образом, разбиение единого электромагнитного поля на его электрическую и магнитную составляющие носит относительный характер.

2.4. Принцип суперпозиции полей.

Источниками электромагнитного поля являются электрические заряды, распределение и движение которых в пространстве описывается заданными функциями ρ и $\vec{j}$. Если имеются несколько различных источников поля ρ_i и $\vec{j}_i$, то полное поле представляет собой геометрическую сумму полей, создаваемых отдельными источниками,

$$\vec{E} = \sum_i \vec{E}_i, \quad \vec{B} = \sum_i \vec{B}_i. \quad (2.15)$$

Данное утверждение называется принципом суперпозиции полей и является обобщением экспериментальных фактов. Следует обратить особое внимание на то, что данный принцип не является следствием суперпозиции сил и должен проверяться экспериментально для самих полей.

2.5. Основные задачи электродинамики.

Основные задачи электродинамики разбиваются на две группы.

1. Задано распределение и движение электрических зарядов в пространстве, т.е. заданы функции $\rho(\vec{r}, t)$ и $\vec{j}(\vec{r}, t)$. Требуется найти характеристики состояния электромагнитного поля $\vec{E}(\vec{r}, t)$ и $\vec{B}(\vec{r}, t)$.
2. Задано электромагнитное поле $\vec{E}(\vec{r}, t)$ и $\vec{B}(\vec{r}, t)$, требуется найти распределение и движение источников поля, т.е. функции $\rho(\vec{r}, t)$ и $\vec{j}(\vec{r}, t)$.

3. Уравнения Максвелла для электромагнитного поля в вакууме.

3.1. Система уравнений Максвелла

Рассмотрим одну из теорем векторного анализа (теорема Гельмгольца), которая нам потребуется для написания уравнений электромагнитного поля. Теорема Гельмгольца: пусть известны дивергенция и ротор некоторого векторного поля во всем пространстве; тогда можно по заданным дивергенции и ротору найти само векторное поле.

Нам необходимо выписать систему уравнений для электромагнитного поля в вакууме, т.е. необходимо написать систему уравнений для векторных характеристик поля $\vec{E}(\vec{r}, t), \vec{B}(\vec{r}, t)$. Согласно теореме Гельмгольца следует определить

$$\begin{cases} \operatorname{div} \vec{E} = \\ \operatorname{rot} \vec{E} = \\ \operatorname{div} \vec{B} = \\ \operatorname{rot} \vec{B} = \end{cases}. \quad (3.1)$$

В правой части уравнений системы (3.1) должны стоять выражения, зависящие от функций источников электромагнитного поля. В качестве таковых следует взять объемную плотность

электрического заряда $\rho(\vec{r}, t)$ и плотность тока $\vec{j}(\vec{r}, t)$. В дальнейшем для написания системы уравнений (3.1) привлечем ряд экспериментальных фактов, которые должны быть отражены в системе (3.1) и ряд общих утверждений, основанных на свойствах симметрии уравнений электромагнитного поля. Известно, что магнитное переменное поле порождает переменное электрическое поле (электромагнитная индукция); переменное электрическое поле порождает переменное магнитное поле (магнитоэлектрическая индукция). Поэтому в качестве источников полей, наряду с функциями ρ и $\vec{j}$, следует взять функции $\frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$ и $\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$. В силу принципа суперпозиции правые части уравнений системы (3.1) должны быть линейными уравнениями.

В дальнейшем примем во внимание, что поле $\vec{E}$ - истинный вектор, поле $\vec{B}$ - псевдовектор. В свою очередь $\text{div} \vec{E}$ - истинный скаляр, $\text{rot} \vec{E}$ - псевдовектор, $\text{div} \vec{B}$ - псевдоскаляр, $\text{rot} \vec{B}$ - истинный вектор. Уравнения системы (3.1) должны быть ковариантными относительно операции пространственной инверсии: если в левой части уравнения стоит истинный скаляр, то и правая часть уравнения должна представлять собой истинный скаляр и т.д.

Данным требованиям удовлетворяет следующая система уравнений:

$$\begin{cases} \text{div} \vec{E} = a \rho, & \text{rot} \vec{E} = b \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \\ \text{div} \vec{B} = 0, & \text{rot} \vec{B} = d \vec{j} + f \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \end{cases}, \quad (3.2)$$

где a, b, d, f - неопределенные коэффициенты.

Система уравнений (3.2) является линейной, как того требует принцип суперпозиции, и отражает свойство зеркальной симметрии пространства.

Рассмотрим электромагнитное поле в области пространства, где $\rho = 0$ и $\vec{j} = 0$. Выпишем

$$\text{rot} \text{rot} \vec{B} = \text{grad} \left(\underset{=0}{\text{div} \vec{B}} \right) - \nabla^2 \vec{B} = -\nabla^2 \vec{B} = f \text{rot} \left(\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right) = f \frac{\partial}{\partial t} (\text{rot} \vec{E}) = f b \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2}.$$

Отсюда:

$$\nabla^2 \vec{B} + f b \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} = 0. \quad (3.3)$$

Аналогично, вычисляя $\text{rot} \text{rot} \vec{E}$, найдем

$$\nabla^2 \vec{E} + f b \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = 0. \quad (3.4)$$

Уравнения (3.3) и (3.4) есть волновые уравнения, которые описывают процесс распространения электромагнитного поля в вакууме в виде электромагнитных волн. Скорость распространения электромагнитных волн равна скорости света $v = c$. Сравнивая, уравнения (3.3) и (3.4) с волновым уравнением

$$\nabla^2 \vec{B} - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} = 0$$

найдем

$$f b = -\frac{1}{c^2}.$$

Следует взять

$$b = -\frac{1}{c}, \quad f = \frac{1}{c}. \quad (3.5)$$

В дальнейшем мы покажем, что выбор знаков в формулах (3.5) отражает правило Ленца.

В системе (3.2) остались неопределенными коэффициенты a и d . Данные коэффициенты определяются выбором единиц измерения. В системе СГС

$$a = 4\pi, \quad d = \frac{4\pi}{c}. \quad (3.6)$$

Таким образом, система уравнений (3.2) в окончательном виде запишется так:

$$\begin{cases} \operatorname{div} \vec{E} = 4\pi \rho, & \operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \\ \operatorname{div} \vec{B} = 0, & \operatorname{rot} \vec{B} = \frac{4\pi}{c} \vec{j} + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}. \end{cases} \quad (3.7)$$

Это есть искомая система уравнений Максвелла для электромагнитного поля в вакууме.

Покажем, что данная система уравнений включает в себя закон сохранения электрического заряда. Для этого возьмем дивергенцию от $\operatorname{rot} \vec{B}$ и учтем, что дивергенция от ротора равна нулю:

$$0 = \operatorname{div}(\operatorname{rot} \vec{B}) = \frac{4\pi}{c} \left[\operatorname{div} \vec{j} + \frac{1}{4\pi} \operatorname{div} \left(\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right) \right] = \frac{4\pi}{c} \left[\operatorname{div} \vec{j} + \frac{1}{4\pi} \frac{\partial}{\partial t} (\operatorname{div} \vec{E}) \right] = \frac{4\pi}{c} \left[\operatorname{div} \vec{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} \right].$$

В результате получаем закон сохранения электрического заряда в виде уравнения непрерывности:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \vec{j} = 0.$$

3.2. Принцип причинности в электродинамике.

Уравнения Максвелла (3.7) являются линейными дифференциальными уравнениями в частных производных по времени и по пространственным координатам. Для однозначного их решения необходимо задать начальные условия

$$\vec{E}_0(\vec{r}) = \vec{E}(\vec{r}, 0), \quad \vec{B}_0(\vec{r}) = \vec{B}(\vec{r}, 0) \quad (3.8)$$

и граничные условия. В качестве граничных условий обычно полагают, что при $r \rightarrow \infty$ модули полей убывают до нуля. При заданных начальных (3.8) и граничных условиях система уравнений (3.7) имеет единственное решение. Заметим, что скорости изменения полей $\frac{\partial \vec{E}}{\partial t}, \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$ определяются через значения полей $\vec{E}$ и $\vec{B}$ в тот же момент времени (динамический принцип электродинамики). Это вытекает из того требования, что функции $\vec{E}$ и $\vec{B}$ полностью определяют состояние системы (электромагнитного поля) и ее характеристики в данный момент времени. Уравнения Максвелла (3.7) при заданных начальных и граничных условиях полностью определяют эволюцию электромагнитного поля, т.е. его изменение со временем – принцип причинности в электродинамике.

3.3. Уравнения Максвелла в интегральной форме

Система уравнений (3.7) может быть переписана в интегральной форме. Для этого следует воспользоваться теоремами Гаусса

$$\int_V \operatorname{div} \vec{a} dV = \oint_{S_V} \vec{a} d\vec{S} \quad (3.9)$$

и Стокса

$$\int_S \operatorname{rot} \vec{a} d\vec{S} = \oint_L \vec{a} d\vec{l}. \quad (3.10)$$

В правой части формул (3.9) и (3.10) стоят поток вектора $\vec{a}$ через замкнутую поверхность S и циркуляция вектора $\vec{a}$ по замкнутому контуру L (рис. 3.1), соответственно.

Возьмем уравнение $\operatorname{div} \vec{E} = 4\pi\rho$, проинтегрируем его по объему пространства и используем теорему Гаусса:

$$\int_V \operatorname{div} \vec{E} dV = \oint_{S_V} \vec{E} d\vec{S} = \int_V 4\pi\rho dV = 4\pi \int_V \rho dV = 4\pi q_V,$$

т.е.

$$\oint_S \vec{E} d\vec{S} = 4\pi q_V, \quad (3.11)$$

где $q_V = \int_V \rho dV$ - электрический заряд внутри объема V .

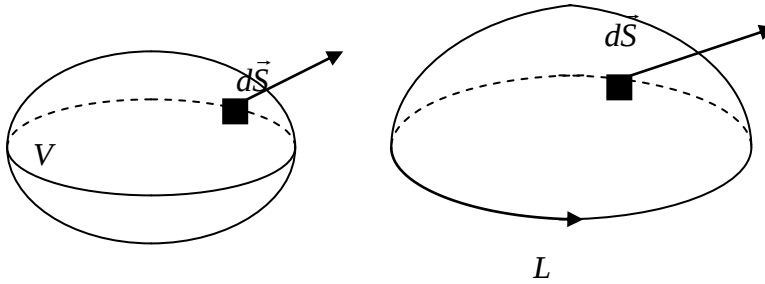


Рис. 3.1.

Аналогично, из уравнения $\text{div} \vec{B} = 0$, находим

$$\oint_S \vec{B} d\vec{S} = 0. \quad (3.12)$$

Уравнение (3.11) называют теоремой Гаусса в электродинамике: поток вектора электрического поля через замкнутую поверхность равен электрическому заряду внутри этой поверхности. В частном случае из данной теоремы следует выражение для электростатического поля неподвижного заряда. Интегрируя по сфере радиуса r , в центре которой расположен электрический заряд q , получим:

$$\oint_S \vec{E} d\vec{S} = E \oint_S dS = E 4\pi r^2 = 4\pi q$$

и

$$E = \frac{q}{r^2}, \quad \vec{E} = \frac{q}{r^2} \vec{e}_r. \quad (3.13)$$

Поместим заряд Q в поле точечного заряда q (3.13). Сила, действующая на заряд Q ,

$$\vec{F}_Q = Q\vec{E} = Q \frac{q}{r^2} \vec{e}_r \quad (3.14)$$

- закон Кулона.

Уравнение (3.12) показывает, что поток магнитного поля через замкнутую поверхность равен нулю – магнитное поле является соленоидальным, силовые линии его замкнуты; в природе отсутствуют магнитные заряды.

Применим теорему Стокса к уравнению $\text{rot} \vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$:

$$\begin{aligned} \int_S \text{rot} \vec{E} d\vec{S} &= \oint_L \vec{E} d\vec{l} = -\frac{1}{c} \int_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} d\vec{S} = -\frac{1}{c} \frac{d}{dt} \int_S \vec{B} d\vec{S} = -\frac{1}{c} \frac{d}{dt} \Phi_B, \\ \oint_L \vec{E} d\vec{l} &= -\frac{1}{c} \frac{d}{dt} \Phi_B \end{aligned} \quad (3.15)$$

- циркуляция вектора электрического поля вдоль замкнутого контура пропорциональна скорости изменения магнитного потока, пронизывающего этот контур. Знак минус в данной формуле отражает правило Ленца. Следует обратить внимание на тот факт, что интегрирование в формуле (3.15) производится по произвольному замкнутому контуру и не связано с наличием в пространстве проводников. Первичное действие переменного магнитного поля есть появление электрического поля. Появление тока в проводнике, помещенном в переменное магнитное поле есть вторичный эффект и связан с природой конкретного проводника. Формула (3.15) называется обобщенным законом индукции Фарадея.

Применяя теорему Стокса к уравнению

$$\text{rot} \vec{B} = \frac{4\pi}{c} \vec{j} + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t},$$

получим:

$$\oint_L \vec{B} d\vec{l} = \frac{4\pi}{c} \int_S \vec{j} d\vec{S} + \frac{1}{c} \frac{d}{dt} \int_S \vec{E} d\vec{S} = \frac{4\pi}{c} J + \frac{1}{c} \frac{d}{dt} \Phi_E. \quad (3.16)$$

Формула (3.16) показывает, что циркуляция вектора магнитного поля вдоль замкнутого контура пропорциональна полному току, пронизывающего поверхность, натянутую на этот контур, и скорости изменения потока электрического поля через эту поверхность. Данная формула содержит в себе закон полного тока (первое слагаемое) и гипотезу о токе смещения (второе слагаемое). Как и в случае с переменным магнитным полем формула (3.16) изначально не предполагает существования в пространстве каких-либо проводников.

Выпишем уравнения Максвелла в интегральной форме:

$$\begin{cases} \oint_S \vec{E} d\vec{S} = 4\pi \int_V \rho dV & \oint_L \vec{E} d\vec{l} = -\frac{1}{c} \frac{d}{dt} \int_S \vec{B} d\vec{S} \\ \oint_S \vec{B} d\vec{S} = 0 & \oint_L \vec{B} d\vec{l} = \frac{4\pi}{c} \int_S \vec{j} d\vec{S} + \frac{1}{c} \frac{d}{dt} \int_S \vec{E} d\vec{S} \end{cases}. \quad (3.17)$$

3.4. Уравнения Даламбера

Система уравнений Максвелла (3.7) представляет собой систему зацепляющихся дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка. Данную систему уравнений можно расцепить так, чтобы каждое из уравнений содержало либо электрическое поле, либо магнитное поле.

Для этого нужно проделать вычисления, что и при выводе волновых уравнений (3.3) и (3.4), т.е. вычисляя ротор от ротора электрического и магнитного полей в системе уравнений (3.7). При этом следует взять $\rho \neq 0$, $\vec{j} \neq 0$. В результате мы получим следующие дифференциальные уравнения для электрического и магнитного полей:

$$\nabla^2 \vec{E} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = 4\pi \left(\text{grad} \rho + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{j}}{\partial t} \right), \quad \nabla^2 \vec{B} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} = -\frac{4\pi}{c} \text{rot} \vec{j}. \quad (3.18)$$

Данные уравнения являются независимыми дифференциальными уравнениями второго порядка по времени. Они называются уравнениями Даламбера. В тех областях пространства, где $\rho = 0$, $\vec{j} = 0$, уравнения Даламбера переходят в волновые уравнения, описывающие распространение электромагнитных волн в вакууме.

4. Потенциалы электромагнитного поля.

4.1. Потенциалы электромагнитного поля

Как было показано в предыдущих лекциях, состояние электромагнитного поля может быть описано с помощью векторных функций - $\vec{E}(\vec{r}, t)$, $\vec{B}(\vec{r}, t)$. Наряду с данными функциями можно использовать другой набор функций состояния электромагнитного поля - потенциалы электромагнитного поля. Описание электромагнитного поля через его потенциалы обладает рядом преимуществ, которые позволяют в ряде случаев существенно упростить решение целого ряда задач.

Рассмотрим уравнение $\text{div} \vec{B} = 0$. Поскольку $\text{div rot} \dots = 0$, то векторное поле $\vec{B}$ можно представить в виде

$$\vec{B}(\vec{r}, t) = \text{rot} \vec{A}(\vec{r}, t), \quad (4.1)$$

где функция $\vec{A}(\vec{r}, t)$ называется векторным потенциалом. Рассмотрим уравнение

$$\text{rot} \vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}.$$

Подставим в него выражение для магнитного поля через векторный потенциал (4.1) и поменяем последовательность операций дифференцирования по времени и координатам:

$$\operatorname{rot} \vec{E} = -\operatorname{rot} \left(\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right), \text{ или } \operatorname{rot} \left(\vec{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right) = 0.$$

Поскольку $\operatorname{rot} \operatorname{grad} \dots = 0$, то

$$\vec{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = -\operatorname{grad} \varphi(\vec{r}, t)$$

и

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = -\operatorname{grad} \varphi(\vec{r}, t) - \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}(\vec{r}, t)}{\partial t}, \quad (4.2)$$

где $\varphi(\vec{r}, t)$ - скалярный потенциал электромагнитного поля.

Таким образом, электрическое и магнитное поле по формулам (4.2) и (4.1) однозначно выражаются через скалярный и векторный потенциалы электромагнитного поля. Это показывает, что потенциалы могут быть использованы в качестве новых переменных состояния электромагнитного поля. 4565

4.2 Уравнения для потенциалов электромагнитного поля

Найдем систему уравнений для потенциалов электромагнитного поля. Для этого используем уравнения Максвелла из системы (3.7), которые содержат источники ρ и $\vec{j}$. Имеем:

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \vec{B} = \operatorname{rot} \operatorname{rot} \vec{A} &= \operatorname{grad} (\operatorname{div} \vec{A}) - \nabla^2 \vec{A} = \frac{4\pi}{c} \vec{j} + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \frac{4\pi}{c} \vec{j} - \frac{1}{c} \operatorname{grad} \frac{\partial \varphi}{\partial t} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2}, \\ \nabla^2 \vec{A} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} &= -\frac{4\pi}{c} \vec{j} + \operatorname{grad} \left\{ \operatorname{div} \vec{A} + \frac{1}{c} \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right\}. \end{aligned} \quad (4.3)$$

Далее:

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \vec{E} &= \operatorname{div} \left(-\operatorname{grad} \varphi - \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right) = -\nabla^2 \varphi - \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} (\operatorname{div} \vec{A}) + \underbrace{\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} - \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{c} \operatorname{div} \vec{A} \right)}_0 = 4\pi \rho, \\ \nabla^2 \varphi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} &= -4\pi \rho - \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \left\{ \operatorname{div} \vec{A} + \frac{1}{c} \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right\}. \end{aligned} \quad (4.4)$$

Уравнения (4.3) и (4.4) являются искомыми уравнениями для потенциалов. Это есть система зацепляющихся дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка. В качестве неизвестных здесь выступают четыре функции – три проекции векторного потенциала и скалярный потенциал. В системе уравнений Максвелла таких функций шесть – три проекции электрического поля и три проекции магнитного поля.

Систему уравнений (4.3), (4.4) можно существенным образом упростить. Здесь мы используем следующее утверждение: потенциалы электромагнитного поля можно изменять некоторым образом (совершать калибровочное преобразование) так, что при этом функции электрического и магнитного полей не должны меняться. Это свойство полей называется калибровочной инвариантностью.

Допустимые калибровочные преобразования:

$$\vec{A} \rightarrow \vec{A}' = \vec{A} + \operatorname{grad} \psi, \quad \varphi \rightarrow \varphi' = \varphi - \frac{1}{c} \frac{\partial \psi}{\partial t}, \quad (4.5)$$

где $\psi(\vec{r}, t)$ - произвольная дифференцируемая функция. Покажем, что преобразования (4.5) оставляют неизменными функции электрического и магнитного полей.

Имеем:

$$\begin{aligned} \vec{E}' &= -\operatorname{grad} \varphi' - \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}'}{\partial t} = \left(-\operatorname{grad} \varphi + \frac{1}{c} \operatorname{grad} \frac{\partial \psi}{\partial t} \right) - \left\{ \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} + \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} (\operatorname{grad} \psi) \right\} = \\ &= -\operatorname{grad} \varphi - \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = \vec{E} \end{aligned}$$

$$\vec{B}' = \text{rot } \vec{A}' = \text{rot } \vec{A} + \text{rot}(\text{grad} \psi) = \text{rot } \vec{A} = \vec{B}.$$

Калибровочные преобразования (4.5) позволяют подобрать потенциалы таким образом, чтобы выполнялось условие (условие Лоренца):

$$\text{div } \vec{A} + \frac{1}{c} \frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0. \quad (4.6)$$

В этом случае система уравнений (4.3) и (4.4) расцепляется, и для потенциалов электромагнитного поля получаем следующие уравнения (уравнения Даламбера для потенциалов):

$$\nabla^2 \vec{A} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} = -\frac{4\pi}{c} \vec{j}, \quad \nabla^2 \varphi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = -4\pi \rho. \quad (4.7)$$

В отсутствии источников $\rho = 0$, $\vec{j} = 0$, уравнения (4.7) переходят в волновые уравнения.

В заключение отметим, то для электростатического поля

$$\vec{E} = -\text{grad} \varphi,$$

где знак минус показывает, что силовые линии поля направлены в сторону убывания потенциала. Этим объясняется выбор знака минус перед градиентом в формуле (4.2).

5. Энергия и импульс электромагнитного поля.

5.1. Система частиц в заданном электромагнитном поле

Рассмотрим систему одинаковых заряженных частиц, которые не взаимодействуют друг с другом. Энергия частиц в единичном объеме:

$$\varepsilon = \frac{dE}{dV} = \frac{mv^2}{2} n, \quad (5.1)$$

где n - концентрация частиц. Плотность потока энергии:

$$\vec{q} = \varepsilon \vec{v} \quad (5.2)$$

- энергия, протекающая за единицу времени через единичную площадку, перпендикулярную вектору скорости в данной точке пространства в данный момент времени.

Величины (5.1) и (5.2) подчиняются уравнению:

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + \text{div } \vec{q} = 0, \quad (5.3)$$

которое получается таким же образом, что и уравнение непрерывности (1.15), выражающее собой закон сохранения электрического заряда. Уравнение непрерывности (5.3) показывает, что энергия частиц в некотором определенном объеме V меняется за счет прихода частиц в данный объем или выхода из него.

Пусть теперь данная система частиц находится в заданном электромагнитном поле. Кинетическая энергия частиц в этом случае меняется за счет действия на них электромагнитного поля (силы Лоренца). Уравнение непрерывности (5.3) в этом случае примет вид:

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + \text{div } \vec{q} = (\vec{j}, \vec{E}), \quad (5.4)$$

где в правой части стоит плотность мощности силы Лоренца. Уравнение (5.4) показывает, что механическая энергия частиц может переходить в энергию электромагнитного поля и, наоборот.

5.2. Плотность энергии и плотность потока энергии электромагнитного поля

Покажем, что из системы уравнений Максвелла можно получить аналог уравнения (5.4). Возьмем $\text{rot } \vec{E}$ и $\text{rot } \vec{B}$ из системы уравнений Максвелла (3.7) и вычислим:

$$\begin{aligned} (\vec{B}, \text{rot } \vec{E}) - (\vec{E}, \text{rot } \vec{B}) &= \text{div} [\vec{E}, \vec{B}] = -\frac{1}{c} \left(\vec{B}, \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \right) - \frac{4\pi}{c} (\vec{j}, \vec{E}) - \frac{1}{c} \left(\vec{E}, \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right) = \\ &= -\frac{4\pi}{c} (\vec{j}, \vec{E}) - \frac{1}{2c} \frac{\partial}{\partial t} (\vec{E}^2 + \vec{B}^2) \end{aligned}$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\vec{E}^2 + \vec{B}^2}{8\pi} \right) + \operatorname{div} \left\{ \frac{c}{4\pi} [\vec{E}, \vec{B}] \right\} = -(\vec{j}, \vec{E}) . \quad (5.5)$$

Введем величины:

$$W = \frac{\vec{E}^2 + \vec{B}^2}{8\pi} \quad (5.6)$$

и

$$\vec{\Pi} = \frac{c}{4\pi} [\vec{E}, \vec{B}] . \quad (5.7)$$

В данных обозначениях уравнение (5.5) примет вид

$$\frac{\partial W}{\partial t} + \operatorname{div} \vec{\Pi} = -(\vec{j}, \vec{E}) \quad (5.8)$$

аналогичный уравнению (5.4).

Для выяснения физического смысла величин (5.6) и (5.7) сложим уравнения (5.4) и (5.8). В результате получим:

$$\frac{\partial}{\partial t} (\varepsilon + W) + \operatorname{div} (\vec{q} + \vec{\Pi}) = 0 . \quad (5.9)$$

Данное уравнение отвечает закону сохранения некоторой физической величины, распределение которой в пространстве описывается функцией плотности $\varepsilon + W$. Поскольку ε - плотность энергии частиц, то величину W следует трактовать как плотность энергии электромагнитного поля. Вектор $\vec{\Pi}$, очевидно, представляет собой плотность потока энергии электромагнитного поля (вектор Пойнтинга).

Уравнение непрерывности представляет собой закон сохранения энергии для системы частицы + поле.

Покажем это. Проинтегрируем уравнение (5.9) по всему пространству:

$$\frac{d}{dt} \int_{R^3} (\varepsilon + W) dV = - \oint_{S_\infty} (\vec{q} + \vec{\Pi}, d\vec{S}) .$$

Движение частиц считаем финитным. Поэтому $\vec{q}|_{S_\infty} = 0$. Поля $\vec{E}, \vec{B}$ убывают по модулю быстрее, чем $1/r$. Следовательно, интеграл в правой части последнего уравнения равен нулю. Таким образом,

$$\int_{R^3} (\varepsilon + W) dV = \text{const} . \quad (5.10)$$

Выражение в левой части уравнения (5.10) представляет собой полную энергию системы частицы + поле, которая, очевидно, сохраняется.

5.3. Понятие об импульсе электромагнитного поля

Рассмотрим релятивистскую частицу, которая обладает импульсом $\vec{p}$ и энергией E . Связь между данными величинами определяется формулой

$$\vec{p} = \frac{E}{c^2} \vec{v} . \quad (5.11)$$

Для частиц в объеме dV :

$$d\vec{p} = \frac{dE}{c^2} \vec{v} .$$

Плотность импульса:

$$\vec{\pi} = \frac{d\vec{p}}{dV} = \frac{\varepsilon}{c^2} \vec{v} . \quad (5.12)$$

Произведение $\varepsilon \vec{v} = \vec{q}$ есть плотность потока энергии. В результате мы получаем:

$$\vec{\pi} = \frac{\vec{q}}{c^2} . \quad (5.13)$$

Уравнение (5.13) является локальным уравнением (отнесенным к единице объема), которое связывает между собой импульс и энергию частиц.

Данное уравнение может быть интерпретировано следующим образом: переносу энергии в пространстве отвечает некоторый импульс. Локальное соотношение между ними определяется формулой (5.13).

Локальному соотношению удовлетворяет и электромагнитное поле. Плотность потока энергии электромагнитного поля есть вектор $\vec{\Pi}$ (5.7). Следовательно, плотность импульса электромагнитного поля

$$\vec{\tau} = \frac{\vec{\Pi}}{c^2} = \frac{1}{4\pi c} [\vec{E}, \vec{B}] . \quad (5.14)$$

Для системы частицы + поле справедлив закон сохранения импульса: полный импульс системы сохраняется:

$$\int_{R^3} (\vec{\pi} + \vec{\tau}) dV = const . \quad (5.15)$$

На основе понятия об импульсе электромагнитного поля объясняется давление света (давление света будет рассмотрено при обсуждении электромагнитных волн).