Коммутаторы

Определение коммутатора: $\left[\hat{A},\hat{B}\right] \equiv \hat{A}\hat{B}-\hat{B}\hat{A}$.
Свойства коммутаторов:

- $\left[\hat{A},\hat{B}\right] = -\left[\hat{B},\hat{A}\right]$;
- $\left[c\hat{A},\hat{B}\right] = \left[\hat{A},c\hat{B}\right] = c\left[\hat{A},\hat{B}\right]$, где c – const;
- $\left[\hat{A}+\hat{B},\hat{C}\right] = \left[\hat{A},\hat{C}\right] + \left[\hat{B},\hat{C}\right]$;
- $\left[\hat{A}\hat{B},\hat{C}\right] = \hat{A}\left[\hat{B},\hat{C}\right] + \left[\hat{A},\hat{C}\right]\hat{B}$;
- $\left[\hat{A},\hat{B}\hat{C}\right] = \hat{B}\left[\hat{A},\hat{C}\right] + \left[\hat{A},\hat{B}\right]\hat{C}$;

Правило перестановки двух операторов в произведении: $\hat{A}\hat{B} = \hat{B}\hat{A} + \left[\hat{A},\hat{B}\right]$

Операторы физических величин в координатном представлении

- Оператор координаты: $\hat{x}_i = x_i, \quad x_i = \{x,y,z\}$.
- Оператор импульса: $\hat{p}_i = -i\hbar\dfrac{\partial}{\partial x_i}, \quad \hat{p}_i = \{\hat{p}_x,\hat{p}_y,\hat{p}_z\}, \quad \hat{\vec{p}} = -i\hbar\nabla$.
- Оператор кинетической энергии: $\hat{T} = \dfrac{\hat{\vec{p}}^2}{2m} = -\dfrac{\hbar^2}{2m}\Delta$.
- Оператор Гамильтона: $\hat{H} = \hat{T} + U(\vec{r},t) = \dfrac{\hat{\vec{p}}^2}{2m} + U(\vec{r},t)$.
- Оператор момента импульса: $\hat{\vec{M}} = \hat{\vec{r}}\times\hat{\vec{p}}, \quad \hat{M}_i = \varepsilon_{ijk}\hat{x}_j\hat{p}_k$,
  $\hat{M}_x = \hat{y}\hat{p}_z - \hat{z}\hat{p}_y = i\hbar\left(z\frac{\partial}{\partial y} - y\frac{\partial}{\partial z}\right)$,
  $\hat{M}_y = \hat{z}\hat{p}_x - \hat{x}\hat{p}_z = i\hbar\left(x\frac{\partial}{\partial z} - z\frac{\partial}{\partial x}\right)$,
  $\hat{M}_z = \hat{x}\hat{p}_y - \hat{y}\hat{p}_x = i\hbar\left(y\frac{\partial}{\partial x} - x\frac{\partial}{\partial y}\right)$.

Коммутаторы операторов физических величин

Фундаментальные коммутаторы:

$$[x_i,\hat{p}_j] = i\hbar\delta_{ij}, \qquad [x_i,x_j] = 0, \qquad [\hat{p}_i,\hat{p}_j] = 0,$$

Другие коммутаторы:

$$\left[x_i,\hat{H}\right] = \frac{i\hbar}{m}\hat{p}_i, \qquad \left[\hat{p}_i,\hat{H}\right] = -i\hbar\frac{\partial U}{\partial x_i},$$

$$\left[x_i,\hat{M}_j\right] = i\hbar\varepsilon_{ijk}x_k, \qquad \left[\hat{p}_i,\hat{M}_j\right] = i\hbar\varepsilon_{ijk}\hat{p}_k,$$

$$\left[\hat{M}_i,\hat{M}_j\right] = i\hbar\varepsilon_{ijk}\hat{M}_k,$$

$$\left[\hat{M}_i,\vec{r}^2\right] = 0, \qquad \left[\hat{M}_i,\hat{\vec{p}}^2\right] = 0, \qquad \left[\hat{M}_i,\hat{\vec{M}}^2\right] = 0,$$