

Комп'ютерне моделювання нелінійних фізичних систем

Лабораторна робота 2

Метод Кривова–Боголюбова в теорії нелінійних коливань

1. Огляд методу

Йдеться про теорію коливань, які описуються нелінійним диференціальним рівнянням виду

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = Q(x, \dot{x}) \quad Q(x, \dot{x}) \sim \varepsilon, \quad \varepsilon \ll 1, \quad (1)$$

де $Q(x, \dot{x})$ – відома функція порядку ε , а ε – малий параметр теорії. Розглядається наближений розв'язок рівняння (1) з початковими умовами

$$x(t=0) \equiv x_0, \quad \dot{x}(t=0) \equiv \dot{x}_0. \quad (2)$$

Для моделювання пропонується рівняння

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x + \lambda x^2 + \mu x^3 = 0. \quad (3)$$

У методі Кривова–Боголюбова при $\lambda, \mu \sim \varepsilon$ ($\varepsilon \ll 1$) розв'язок рівняння (1) шукається у формі

$$x(t) = x(a(t), \varphi(t)), \quad (4)$$

де функції $a(t)$ і $\varphi(t)$ задовольняють рівняння

$$\dot{a}(t) = f(a(t)), \quad \dot{\varphi}(t) = \omega(a(t)). \quad (5)$$

Невідомі малі функції $x(a, \varphi)$, $f(a)$, $\omega(a)$ шукаються у вигляді розвинення за степенями малого параметра ε

$$\begin{aligned} x(a, \varphi) &= x_0 + x_1 + x_2 + O(\varepsilon^3), & f(a) &= f_1 + f_2 + O(\varepsilon^3), \\ \omega(a) &= \omega_0 + \omega_1 + \omega_2 + O(\varepsilon^3), \end{aligned} \quad (6)$$

де індекс позначає порядок величини за степенями ε

$$x_s \sim \varepsilon^s, \quad f_s \sim \varepsilon^s, \quad \omega_s \sim \varepsilon^s. \quad (7)$$

Величини a і φ визначаються формулою

$$x_0 = a \cos \varphi \quad (8)$$

Перший внесок у розвинення функції $\omega(a)$ безумовно збігається з частотою гармонічних коливань ω_0 .

З точністю до внесків першого порядку за параметром ε для рівняння (3) знайдено

$$x = a \cos \varphi - \frac{\lambda a^2}{2\omega_0^2} + \frac{\lambda a^2}{6\omega_0^2} \cos 2\varphi + \frac{\mu a^3}{32\omega_0^2} \cos 3\varphi, \quad (9)$$

$$\dot{\varphi} = \omega_0 + \frac{3\mu a^2}{8\omega_0}, \quad \dot{a} = 0. \quad (10)$$

Розв'язок задачі Коші для двох останніх рівнянь (10) має вигляд

$$\varphi(t) = \left(\omega_0 + \frac{3\mu a_0^2}{8\omega_0} \right) t + \varphi_0, \quad a(t) = a_0, \quad (11)$$

де запроваджені початкові значення a_0 і φ_0 функцій $\varphi(t)$ і $a(t)$.

Закон руху системи згідно з (9), (11) у методі Крилова–Боголюбова дається формулою

$$x = a_0 \cos \left(\left(\omega_0 + \frac{3\mu a_0^2}{8\omega_0} \right) t + \varphi_0 \right) - \frac{\lambda a_0^2}{2\omega_0^2} + \frac{\lambda a_0^2}{6\omega_0^2} \cos 2 \left(\left(\omega_0 + \frac{3\mu a_0^2}{8\omega_0} \right) t + \varphi_0 \right) + \frac{\mu a_0^3}{32\omega_0^2} \cos 3 \left(\left(\omega_0 + \frac{3\mu a_0^2}{8\omega_0} \right) t + \varphi_0 \right) \quad (12)$$

Початкові значення координати x_0 і швидкості $\dot{x}_0$ відповідно до (12) даються формулами

$$x_0 = a_0 \cos \varphi_0 - \frac{\lambda a_0^2}{2\omega_0^2} + \frac{\lambda a_0^2}{6\omega_0^2} \cos 2\varphi_0 + \frac{\mu a_0^3}{32\omega_0^2} \cos 3\varphi_0, \quad (13)$$

$$\dot{x}_0 = - \left(a_0 \sin \varphi_0 + \frac{\lambda a_0^2}{3\omega_0^2} \sin 2\varphi_0 + \frac{3\mu a_0^3}{32\omega_0^2} \sin 3\varphi_0 \right) \left(\omega_0 + \frac{3\mu a_0^2}{8\omega_0} \right). \quad (14)$$

Умова малості параметрів λ та μ впливає з (12) і має вигляд

$$\frac{\lambda a_0}{\omega_0^2} \ll 1, \quad \frac{\mu a_0^2}{\omega_0^2} \ll 1. \quad (15)$$

2. Комп'ютерний експеримент

1. Побудувати графік наближеного рішення (12) рівняння (3) при різних значеннях параметрів ω_0 , a_0 , φ_0 , λ , μ (графік функції $x_1(t)$). При малих параметрах λ , μ період коливань $T = 2\pi / \omega_0$. Обрати декілька випадків часу експерименту $\tau = 0, 1T, T, 10T$.
2. Обчислити по формулах (13), (14) відповідні значення початкових умов x_0 , $\dot{x}_0$.
3. Використати отримані початкові умови для розв'язування рівняння (3) і побудови графіка рішення (графік функції $x_2(t)$). Обрати декілька випадків часу експерименту $\tau = 0, 1T, T, 10T$.
4. Побудувати графіки функцій $x_1(t)$ і $x_2(t)$ на спільних осях.
5. З'ясувати, чи є перехідний процес, після перебігу якого наближення Крилова–Боголюбова апроксимує точне рішення, тобто графіки функцій $x_1(t)$, $x_2(t)$ збігаються.
6. З'ясувати, як впливає величина параметрів λ , μ на придатність наближення Крилова–Боголюбова (збіг графіків функцій $x_1(t)$, $x_2(t)$).
7. Чисельні значення параметрів обирати у відповідності до Таблиці.

Таблиця

№	ω_0	a_0	φ_0	μ	λ	$\mu a_0^2 / \omega_0^2$	$\lambda a_0 / \omega_0^2$	$T = 2\pi / \omega_0$
1	10	2	0	0,2	0,4	0,008	0,008	0,63
2	10	2	0	2	4	0,08	0,08	0,63
3	10	2	0	10	20	0,4	0,4	0,63
4	10	2	0	40	80	1,6	1,6	0,63
5	10	2	0	100	200	4,0	4,0	0,63
6	10	2	0	200	400	8,0	8,0	0,63
7	10	2	$\pi / 2$	0,2	0,4	0,008	0,008	0,63
8	10	2	$\pi / 2$	2	4	0,08	0,08	0,63
9	10	2	$\pi / 2$	10	20	0,4	0,4	0,63
10	10	2	$\pi / 2$	40	80	1,6	1,6	0,63
11	10	2	$\pi / 2$	100	200	4,0	4,0	0,63
12	10	2	$\pi / 2$	200	400	8,0	8,0	0,63
13	20	2	0	0,2	0,4	0,002	0,002	0,31
14	20	2	0	2	4	0,02	0,02	0,31
15	20	2	0	10	20	0,1	0,1	0,31
16	20	2	0	40	80	0,4	0,4	0,31
17	20	2	0	100	200	1,0	1,0	0,31
18	20	2	0	400	800	4,0	4,0	0,31

3. Звіт

Звіт про виконання цієї роботи підготувати в системі LaTeX.

Зміст звіту:

1. Огляд методу Крилова–Боголюбова дослідження нелінійних коливань.
2. Програмний код у пакеті *Mathematica* побудови графіка функції $x_1(t)$ (12) і обчислення за (13), (14) початкових умов до рівняння (3).
3. Програмний код у пакеті *Mathematica* побудови графіка функції $x_2(t)$ – наближеного розв'язку рівняння (3) з обчисленими початковими умовами.
4. Програмний код у пакеті *Mathematica* об'єднання графіків функцій $x_1(t)$, $x_2(t)$ на спільних осях.
5. Графіки функцій $x_1(t)$, $x_2(t)$ на спільних осях за різних параметрів з Таблиці (9 рисунків).
6. Висновки на основі відповідей на питання:
 - а. Наявність перехідного процесу до рівнянь Крилова–Боголюбова?
 - б. Погіршення точності методу Крилова–Боголюбова зі зростанням параметрів λ , μ ?