

Матеріал до посібника Гладуша В. Д.
**"Розв'язування задач з електродинаміки
Релятивістська механіка
Основні рівняння**

Перетворення Лоренца

$$\begin{aligned}t &= \gamma \left(t' + \frac{V}{c^2} x' \right) \\x &= \gamma (x' + V t') \\y &= y', \quad z = z'\end{aligned}$$

де

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}$$

і

$$\vec{V} = \{V, 0, 0\}$$

Обернені перетворення Лоренца

$$\begin{aligned}t' &= \gamma \left(t - \frac{V}{c^2} x \right) \\x' &= \gamma (x - V t) \\y' &= y, \quad z' = z\end{aligned}$$

Перетворення швидкості $\vec{v} = \{v_x, v_y, v_z\}$, коли $\vec{V} = \{V, 0, 0\}$, або формула складання швидкостей

$$\begin{aligned}v_x &= \frac{v'_x + V}{1 + v'_x V/c^2} \\v_y &= \frac{v'_y \sqrt{1 - V^2/c^2}}{1 + v'_x V/c^2} \\v_z &= \frac{v'_z \sqrt{1 - V^2/c^2}}{1 + v'_x V/c^2}\end{aligned}$$

Перетворення 4-вектора $A_i = (A_0, A_1, A_2, A_3)$

$$\begin{aligned}A_0 &= \gamma \left(A'_0 + \frac{V}{c^2} A'_1 \right) \\A_1 &= \gamma (A'_1 + V A'_0) \\A_2 &= A'_2, \quad A_3 = A'_3\end{aligned}$$

Частково, деякі задачі з книги В.В. Батыгина, И.Н. Топтыгина

19. (550) Який проміжок часу Δt зайняло за земними годинах політ ракети до зоряної системи Проксіма-Центавра і назад (відстань до неї $L_\alpha = 4$ світлових роки, світловий рік дорівнює 9 460 730 472 580 800 метрам $\approx 9,46 \cdot 10^{15}$ метра), якщо він

здійснюється з постійною швидкістю $V = c\sqrt{0,9999}$? ($c = 3 \cdot 10^8$ м/с). З розрахунку якої тривалості подорожі треба було б запасатися харчами та іншим спорядженням? Який запас кінетичної енергії в такій ракеті, якщо її маса $10m = 10^4$ кг?

Світловий рік дорівнює $L_{св_рік} = c \cdot T_{рік} = 9460730472580800$ метрам $\approx 9,46 \cdot 10^{15}$ метра

$$L_a = 8L_{св_рік} = 8c \cdot t_{рік}$$

$$\Delta L = 2L_a = 8 \cdot 9,46 \cdot 10^{15} \text{ м} = 75,68 \cdot 10^{15} \text{ м}$$

$$\Delta t = \frac{L_a}{V} = \frac{8c \cdot t_{рік}}{c\sqrt{0,9999}} = \frac{8t_{рік}}{\sqrt{0,9999}} = 8 \text{ років} = 96 \text{ місяців}$$

Кількість харчів треба розраховувати за власним часом подорожі

$$\Delta t_0 = \Delta t \sqrt{1 - v^2/c^2} = 96 \sqrt{1 - 0,9999} = 96 \cdot 0,01 = 0,96 \approx 1 \text{ місяць}$$

Який запас кінетичної енергії в такій ракеті, якщо її маса $10m = 10^4$ кг?

$$T = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} - mc^2 = mc^2 \left(\frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} - 1 \right)$$

$$T = mc^2 \left(\frac{1}{\sqrt{1 - 0,9999}} - 1 \right) = mc^2 \left(\frac{1}{0,01} - 1 \right) = 99mc^2$$

$$T = 99 \cdot 10^4 \cdot 9 \cdot 10^{16} \text{ кг} \cdot \text{м}^2/\text{с}^2 = 891 \cdot 10^{20} \text{ Дж} = 891 \cdot 10^{20} \text{ Вт} \cdot \text{с} \\ = 891 \cdot 10^{17} \text{ кВт} \cdot \text{с} = 2,475 \times 10^{16} \text{ кВт} \cdot \text{ч}$$

$$T \approx 2,75 \times 10^{16} \text{ кВт} \cdot \text{ч}$$

Ця кількість енергії в 10000 разів перевищує річне вироблення електроенергії в усьому світі в даний час

?? (552a). Вивести формулу лоренцова перетворення від системи $\dot{S}$ до системи S для радіуса-вектора $\vec{r}$ і часу t , не припускаючи, що швидкість $\vec{V}$ системи $\dot{S}$ відносно S паралельна осі x .

Нехай

$$\vec{n} = \frac{\vec{V}}{V}$$

одичинний вектор у напрямку швидкості $\vec{V}$. Введемо продольну і поперечну компоненти радіуса-вектора $\vec{r}$:

$$\vec{r}_{\parallel} = \vec{n}(\vec{n} \cdot \vec{r}) = \frac{\vec{V}(\vec{V} \cdot \vec{r})}{V^2}$$

$$\vec{r}'_{\parallel} = \vec{n}(\vec{n} \cdot \vec{r}') = \frac{\vec{V}(\vec{V} \cdot \vec{r}')}{V^2}$$

$$r'_{\parallel} = \vec{n} \cdot \vec{r}'_{\parallel} = (\vec{n} \cdot \vec{r}') = \frac{(\vec{V} \cdot \vec{r}')}{V}$$

$$\vec{r}_{\perp} = \vec{r} - \vec{r}_{\parallel}, \quad \vec{r}'_{\perp} = \vec{r}' - \vec{r}'_{\parallel}$$

Згідно перетворенням Лоренца маємо

$$t = \gamma \left(t' + \frac{V}{c^2} r'_{\parallel} \right)$$

$$r_{\parallel} = \gamma (r'_{\parallel} + Vt')$$

Звідси, оскільки $\vec{r}_{\parallel} = \vec{n}r_{\parallel}$, $\vec{r}'_{\parallel} = \vec{n}r'_{\parallel}$, $\vec{V} = \vec{n}V$, маємо

$$t = \gamma \left(t' + \frac{V}{c^2} r'_{\parallel} \right) = \gamma \left(t' + \frac{V}{c^2} \frac{(\vec{V} \cdot \vec{r}')}{V} \right) = \gamma \left(t' + \frac{(\vec{V} \cdot \vec{r}')}{c^2} \right)$$

$$r_{\parallel} = \gamma (r'_{\parallel} + Vt')$$

$$\vec{r}_{\parallel} = \vec{n}r_{\parallel} = \gamma (\vec{r}'_{\parallel} + \vec{V}t'),$$

$$r'_{\parallel} = \vec{n}r'_{\parallel} \quad \vec{V} = \vec{n}V$$

$$\vec{r}_{\perp} = \vec{r}'_{\perp},$$

$$\vec{r}' = \vec{r}'_{\perp} + \vec{r}'_{\parallel}$$

тоді

$$\vec{r} = \vec{r}_{\parallel} + \vec{r}_{\perp} = \gamma (\vec{r}'_{\parallel} + \vec{V}t') + \vec{r}'_{\perp} = \gamma (\vec{r}' - \vec{r}'_{\perp} + \vec{V}t') + \vec{r}'_{\perp} \Rightarrow$$

$$\vec{r} = \gamma (\vec{r}' + \vec{V}t') + (1 - \gamma) \vec{r}'_{\perp} =$$

$$= \gamma (\vec{r}' + \vec{V}t') + (1 - \gamma) (\vec{r}' - \vec{r}'_{\parallel}) =$$

$$= \gamma (\vec{r}' + \vec{V}t') + (1 - \gamma) \left(\vec{r}' - \frac{\vec{V}(\vec{V} \cdot \vec{r}')}{V^2} \right) =$$

$$= \gamma (\vec{r}' + \vec{V}t') + \frac{1 - \gamma}{V^2} (V^2 \vec{r}' - \vec{V}(\vec{V} \cdot \vec{r}')) =$$

$$= \gamma (\vec{r}' + \vec{V}t') - \frac{1 - \gamma}{V^2} [\vec{V}, [\vec{V}, \vec{r}']]$$

Таким чином

$$\vec{r} = \gamma (\vec{r}' + \vec{V}t') + (\gamma - 1) \frac{[\vec{V}, [\vec{V}, \vec{r}']]}{V^2}$$

$$t = \gamma \left(t' + \frac{(\vec{V} \cdot \vec{r}')}{c^2} \right)$$

(552b). Вивести формулу лоренцова перетворення від системи S до системи $\acute{S}$ для радіуса-вектора $\vec{r}$ і часу t , не припускаючи, що швидкість $\vec{V}$ системи $\acute{S}$ відносно S паралельна осі x .

Нехай

$$\vec{n} = \frac{\vec{V}}{V}$$

Введемо продольну і поперечну компоненти радіуса-вектора $\vec{r}$:

$$\vec{r}_{\parallel} = \vec{n}(\vec{n} \cdot \vec{r}) = \frac{\vec{V}(\vec{V} \cdot \vec{r})}{V^2}$$

$$r_{\parallel} = \vec{n} \cdot \vec{r}_{\parallel} = (\vec{n} \cdot \vec{r}) = \frac{(\vec{V} \cdot \vec{r})}{V}$$

$$\vec{r}'_{\parallel} = \vec{n}(\vec{n} \cdot \vec{r}') = \frac{\vec{V}(\vec{V} \cdot \vec{r}')}{V^2}$$

$$r'_{\parallel} = \vec{n} \cdot \vec{r}'_{\parallel} = (\vec{n} \cdot \vec{r}') = \frac{(\vec{V} \cdot \vec{r}')}{V}$$

$$\vec{r}'_{\perp} = \vec{r}' - \vec{r}'_{\parallel}, \quad \vec{r}'_{\perp} = \vec{r}' - \vec{r}'_{\parallel}$$

Згідно перетворенням Лоренца маємо

$$t' = \gamma \left(t - \frac{V}{c^2} r_{\parallel} \right)$$

$$r'_{\parallel} = \gamma (r_{\parallel} - Vt)$$

Звідси, оскільки $\vec{r}'_{\parallel} = \vec{n} r'_{\parallel}$, $\vec{r}'_{\parallel} = \vec{n} \dot{r}'_{\parallel}$, $\vec{V} = \vec{n} V$, маємо

$$t' = \gamma \left(t - \frac{V}{c^2} r_{\parallel} \right) = \gamma \left(t - \frac{V}{c^2} \frac{(\vec{V} \cdot \vec{r})}{V} \right) = \gamma \left(t - \frac{(\vec{V} \cdot \vec{r})}{c^2} \right)$$

$$\dot{r}'_{\parallel} = \gamma (r_{\parallel} - Vt)$$

$$\vec{r}'_{\parallel} = n \dot{r}'_{\parallel} = \gamma (\vec{r}_{\parallel} - \vec{V}t)$$

тоді $\vec{r}'_{\perp} = \vec{r}' - \vec{r}'_{\parallel}$

$$\vec{r}' = \vec{r}'_{\perp} + \vec{r}'_{\parallel} = \vec{r}_{\perp} + \gamma (\vec{r}_{\parallel} - \vec{V}t) = \vec{r}_{\perp} + \gamma (\vec{r} - \vec{r}_{\perp} - \vec{V}t)$$

$$\vec{r}' = \vec{r}_{\perp} + \gamma (\vec{r} - \vec{r}_{\perp} - \vec{V}t) = \gamma (\vec{r} - \vec{V}t) + (1 - \gamma) \vec{r}_{\perp}$$

$$\vec{r}' = \gamma (\vec{r} - \vec{V}t) + (1 - \gamma) \vec{r}_{\perp} =$$

$$= \gamma (\vec{r} - \vec{V}t) + (1 - \gamma) (\vec{r} - \vec{r}_{\parallel})$$

$$= \gamma (\vec{r} - \vec{V}t) + (1 - \gamma) \left(\vec{r} - \frac{\vec{V}(\vec{V} \cdot \vec{r})}{V^2} \right) =$$

$$= \gamma (\vec{r} - \vec{V}t) + \frac{1 - \gamma}{V^2} (V^2 \vec{r} - \vec{V}(\vec{V} \cdot \vec{r}))$$

$$= \gamma (\vec{r} - \vec{V}t) - \frac{1 - \gamma}{V^2} [\vec{V}, [\vec{V}, \vec{r}]]$$

Таким чином

$$\vec{r}' = \gamma (\vec{r} - \vec{V}t) + \frac{\gamma - 1}{V^2} [\vec{V}, [\vec{V}, \vec{r}]]$$

$$t' = \gamma \left(t - \frac{(\vec{V} \cdot \vec{r})}{c^2} \right)$$

Тобто, щоб одержати формули обернених перетворень треба зробити заміну

$$\vec{r} \rightarrow \vec{r}', \quad t \rightarrow t', \quad \vec{V} \rightarrow -\vec{V}$$

?? (553) Записати формули перетворення Лоренца для довільного 4-вектора $A^i = (A^0, \vec{A})$ не припускаючи, що швидкість $\vec{V}$ системи S' відносно S паралельна осі

x .

Оскільки перетворення Лоренца для 4-вектора A^i

$$A^0 = \gamma \left(\dot{A}^0 + \frac{V}{c^2} \dot{A}^1 \right)$$

$$A^1 = \gamma (\dot{A}^1 + V \dot{A}^0)$$

$$A^2 = \dot{A}^2, \quad A^3 = \dot{A}^3$$

по формі співпадають з перетворенням Лоренца 4-вектора x^i

$$t = \gamma \left(t' + \frac{V}{c^2} \dot{x} \right)$$

$$x = \gamma (\dot{x} + V t')$$

$$y = \dot{y}, \quad z = \dot{z}$$

то в довільному випадку, за основу можна взяти формули перетворення радіуса-вектора $\vec{r}$ і часу t

$$t = \gamma \left(t' + \frac{(\vec{V} \cdot \vec{r}')}{c^2} \right)$$

$$\vec{r} = \gamma (\vec{r}' + \vec{V} t') + (\gamma - 1) \frac{[\vec{V}, [\vec{V}, \vec{r}']]}{V^2}$$

одержані у задачі 552.

Таким чином, для довільного 4-вектора $A^i = (A^0, \vec{A})$ маємо

$$A^0 = \gamma \left(\dot{A}^0 + \frac{(\vec{V} \cdot \vec{A}')}{c^2} \right)$$

$$\vec{A} = \gamma (\vec{A}' + \vec{V} \dot{A}^0) + (\gamma - 1) \frac{[\vec{V}, [\vec{V}, \vec{A}']]}{V^2}$$

?? (554) Вивести формулу складання швидкостей для випадку, коли швидкість $\vec{V}$ системи $\dot{S}$ відносно S має довільний напрямок.

1 спосіб. Роскладемо швидкість $\vec{v}$ на продольну і поперечну складові

$$\vec{v} = \vec{v}_{\perp} + \vec{v}_{\parallel}$$

$$\vec{v}' = \vec{v}'_{\perp} + \vec{v}'_{\parallel}$$

де

$$\vec{v}_{\parallel} = \frac{\vec{V}(\vec{V} \cdot \vec{v})}{V^2}, \quad \vec{v}'_{\parallel} = \frac{\vec{V}(\vec{V} \cdot \vec{v}')}{V^2}$$

$$\vec{v}_{\perp} = \vec{v} - \vec{v}_{\parallel}, \quad \vec{v}'_{\perp} = \vec{v}' - \vec{v}'_{\parallel}$$

Тепер ми можемо використати формулу аналогічну формулі складання швидкостей

$$v_x = \frac{v'_x + V}{1 + v'_x V/c^2}$$

$$v_y = \frac{v'_y \sqrt{1 - V^2/c^2}}{1 + v'_x V/c^2}$$

$$v_z = \frac{v'_z \sqrt{1 - V^2/c^2}}{1 + v'_x V/c^2}$$

Маємо

$$v_{\parallel} = \frac{v'_{\parallel} + V}{1 + v'_{\parallel} V/c^2}$$

$$\vec{v}_{\perp} = \frac{\vec{v}'_{\perp} \sqrt{1 - V^2/c^2}}{1 + v'_{\parallel} V/c^2}$$

Далі, оскільки

$$v'_{\parallel} V = (\vec{v}'_{\parallel} \cdot \vec{V}) = (\vec{v}' \cdot \vec{V})$$

то

$$\vec{v}_{\parallel} = \frac{\vec{v}'_{\parallel} + \vec{V}}{1 + (\vec{v}' \cdot \vec{V})/c^2}$$

$$\vec{v}_{\perp} = \frac{\vec{v}'_{\perp} \sqrt{1 - V^2/c^2}}{1 + (\vec{v}' \cdot \vec{V})/c^2}$$

Таким чином

$$\vec{v} = \vec{v}_{\perp} + \vec{v}_{\parallel} = \frac{\vec{v}'_{\perp} \sqrt{1 - V^2/c^2} + \vec{v}'_{\parallel} + \vec{V}}{1 + (\vec{v}' \cdot \vec{V})/c^2}$$

$$\vec{v}_{\perp} = \vec{v} - \vec{v}_{\parallel}, \quad \vec{v}'_{\perp} = \vec{v}' - \vec{v}'_{\parallel}$$

$$\vec{v} = \frac{(\vec{v}' - \vec{v}'_{\parallel}) \sqrt{1 - V^2/c^2} + \vec{v}'_{\parallel} + \vec{V}}{1 + (\vec{v}' \cdot \vec{V})/c^2} = \frac{\vec{V} + \vec{v}' \sqrt{1 - V^2/c^2} + (1 - \sqrt{1 - V^2/c^2}) \vec{v}'_{\parallel}}{1 + (\vec{v}' \cdot \vec{V})/c^2}$$

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}$$

$$\vec{v} = \frac{\vec{V} + \frac{\vec{v}'}{\gamma} + (1 - \frac{1}{\gamma}) \vec{v}'_{\parallel}}{1 + (\vec{v}' \cdot \vec{V})/c^2} = \frac{\gamma \vec{V} + \vec{v}' + (\gamma - 1) \vec{v}'_{\parallel}}{\gamma [1 + (\vec{v}' \cdot \vec{V})/c^2]}$$

$$\vec{v}'_{\parallel} = \frac{\vec{V}(\vec{V} \cdot \vec{v}')}{V^2}$$

$$\vec{v} = \frac{\vec{v}' + \gamma \vec{V} + (\gamma - 1) \frac{\vec{V}(\vec{V} \cdot \vec{v}')}{V^2}}{\gamma [1 + (\vec{v}' \cdot \vec{V})/c^2]}$$

2 спосіб, використовуючи формули із задачі 552

$$\vec{r} = \gamma (\vec{r}' + \vec{V} t') + (\gamma - 1) \frac{[\vec{V}, [\vec{V}, \vec{r}']]}{V^2}$$

$$t = \gamma \left(t' + \frac{(\vec{V} \cdot \vec{r}')}{c^2} \right)$$

$$dt = \gamma \left(dt' + \frac{(\vec{V} \cdot d\vec{r}')}{c^2} \right) = \gamma \left(1 + \frac{(\vec{V} \cdot \vec{v}')}{c^2} \right) dt'$$

Звідси диференціюючи маємо

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{v} = \frac{d}{dt} \left\{ \gamma (\vec{r}' + \vec{V}t') + (\gamma - 1) \frac{[\vec{V}, [\vec{V}, \vec{r}']]}{V^2} \right\}$$

$$\vec{v} = \frac{1}{\gamma \left(1 + \frac{(\vec{V} \cdot \vec{v}')}{c^2} \right)} \frac{d}{dt'} \left\{ \gamma (d\vec{r}' + \vec{V}dt') + (\gamma - 1) \frac{[\vec{V}, [\vec{V}, d\vec{r}']]}{V^2} \right\}$$

$$\vec{v} = \frac{\gamma (\vec{v}' + \vec{V}) + (\gamma - 1) \frac{[\vec{V}, [\vec{V}, \vec{v}']]}{V^2}}{\gamma \left(1 + (\vec{V} \cdot \vec{v}')/c^2 \right)}$$

$$\vec{v} = \frac{\gamma (\vec{v}' + \vec{V}) + (\gamma - 1) \frac{[\vec{V}, [\vec{V}, \vec{v}']]}{V^2}}{\gamma \left(1 + (\vec{V} \cdot \vec{v}')/c^2 \right)}$$

$$[\vec{V}, [\vec{V}, \vec{v}']] = (\vec{V}, (\vec{V}, \vec{v}')) - V^2 \vec{v}'$$

$$\vec{v} = \frac{\gamma (\vec{v}' + \vec{V}) + (\gamma - 1) \left[\frac{(\vec{V}, (\vec{V}, \vec{v}'))}{V^2} - \vec{v}' \right]}{\gamma \left(1 + (\vec{V} \cdot \vec{v}')/c^2 \right)}$$

$$\vec{v} = \frac{\gamma (\vec{v}' + \vec{V}) + (\gamma - 1) \left[\frac{(\vec{V}, (\vec{V}, \vec{v}'))}{V^2} - \vec{v}' \right]}{\gamma \left(1 + (\vec{V} \cdot \vec{v}')/c^2 \right)} = \frac{\gamma (\vec{v}' + \vec{V}) + (\gamma - 1) \frac{(\vec{V}, (\vec{V}, \vec{v}'))}{V^2} - (\gamma - 1) \vec{v}'}{\gamma \left(1 + (\vec{V} \cdot \vec{v}')/c^2 \right)}$$

$$\vec{v} = \frac{\gamma (\vec{v}' + \vec{V}) + (\gamma - 1) \frac{(\vec{V}, (\vec{V}, \vec{v}'))}{V^2} - (\gamma - 1) \vec{v}'}{\gamma \left(1 + (\vec{V} \cdot \vec{v}')/c^2 \right)} = \frac{\vec{v}' + \gamma \vec{V} + (\gamma - 1) \frac{(\vec{V}, (\vec{V}, \vec{v}'))}{V^2}}{\gamma \left(1 + (\vec{V} \cdot \vec{v}')/c^2 \right)}$$

Співпадає з формулою, отриманою першим способом. Її можна переписати таким чином

$$\vec{v} = \frac{\vec{v}' + \gamma \vec{V} + (\gamma - 1) \frac{\vec{V}(\vec{V} \cdot \vec{v}')}{V^2}}{\gamma \left[1 + (\vec{v}' \cdot \vec{V})/c^2 \right]} = \frac{\vec{v}' + \vec{V} + (\gamma - 1) \vec{V} + (\gamma - 1) \frac{\vec{V}(\vec{V} \cdot \vec{v}')}{V^2}}{\gamma \left[1 + (\vec{v}' \cdot \vec{V})/c^2 \right]} = \frac{\vec{v}' + \vec{V} + (\gamma - 1) \left[\vec{V} + \vec{V} \left(\frac{\vec{V} \cdot \vec{v}'}{V^2} \right) \right]}{\gamma \left[1 + (\vec{v}' \cdot \vec{V})/c^2 \right]} =$$

Нарешті одержуємо

$$\vec{v} = \frac{\vec{v}' + \vec{V} + (\gamma - 1) \frac{\vec{V}}{V^2} \left[V^2 + (\vec{V} \cdot \vec{v}') \right]}{\gamma \left[1 + (\vec{v}' \cdot \vec{V})/c^2 \right]}$$

де $\vec{v}'$ і $\vec{v}$ швидкості у системах відліку S' і S .

20. (561). Одну і ту ж відносну швидкість можна надати частинкам, що зіштовхуватися двома способами (частки однієї і тієї ж маси m):

а) один прискорювач розганяє частки до енергії $\mathcal{E}$, потім швидкі частинки вдаряються об нерухому мішень з тих же частинок;

б) два однакових прискорювача створюють пучки частинок, направлені назустріч один одному. Кожен з прискорювачів при цьому повинен розігнати частинки до енергії $\mathcal{E}_0 < \mathcal{E}$. (В обох випадках відносна швидкість одна і та ж.)

Порівняти між собою значення енергій $\mathcal{E}$ і $\mathcal{E}_0$. Розглянути ультрарелятивістських випадок.

Відносна швидкість частинок V пов'язана зі швидкістю частинок v відносно прискорювача знаходимо за правило додавання швидкостей

$$V = \frac{2v}{1 + v^2/c^2}$$

Тоді енергія зіткнення

$$\mathcal{E} = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - V^2/c^2}} = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - \frac{1}{c^2} \left(\frac{2v}{1 + v^2/c^2} \right)^2}} = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - \frac{4v^2}{(c + v^2/c)^2}}} = \frac{mc^2(c + v^2/c)}{\sqrt{(c + v^2/c)^2 - 4v^2}} = \frac{mc^2(c + v^2/c)}{\sqrt{(c - v^2/c)^2}}$$

$$\mathcal{E} = mc^2 \frac{(1 + v^2/c^2)}{(1 - v^2/c^2)} = mc^2 \frac{(1 + v^2/c^2)}{(1 - v^2/c^2)}$$

Енергія частинки зі швидкістю v буде

$$\mathcal{E}_0 = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \Rightarrow \left(\frac{\mathcal{E}_0}{mc^2} \right)^2 = \frac{1}{1 - v^2/c^2}$$

Звідси

$$v^2/c^2 = 1 - \left(\frac{mc^2}{\mathcal{E}_0} \right)^2$$

Тоді

$$\mathcal{E} = mc^2 \frac{(1 + v^2/c^2)}{(1 - v^2/c^2)} = mc^2 \frac{\left(1 + 1 - \left(\frac{mc^2}{\mathcal{E}_0} \right)^2 \right)}{\left(1 - 1 + \left(\frac{mc^2}{\mathcal{E}_0} \right)^2 \right)} = mc^2 \left(2 \left(\frac{\mathcal{E}_0}{mc^2} \right)^2 - 1 \right)$$

У ультрарелятивістських випадку $\mathcal{E} \gg mc^2$, тому

$$\mathcal{E} = mc^2 \left(2 \left(\frac{\mathcal{E}_0}{mc^2} \right)^2 - 1 \right) \cong 2 \frac{\mathcal{E}_0^2}{mc^2}.$$

Для електронів ($mc^2 = 0,5 \text{ Мев}$) маємо при $\mathcal{E}_0 = 50 \text{ Мев}$

$$\mathcal{E} = 2 \cdot \frac{2500}{0,5} = 10000 \text{ Мев}$$

виграш

$$\frac{\mathcal{E}}{\mathcal{E}_0} = \frac{10000}{50} = 200$$

в 200 разів!

21. Плоска електромагнітна хвиля $\vec{E} = \vec{E}_0 \cos(\omega t - kx)$ відбивається від дзеркала, що рухається уздовж осі X вправо зі швидкістю V . Знайти частоту відбитої хвилі ω . (Перенести задачу в раздел с гран условиями или с плоскими волнами!)

Нехай відбита хвиля є

$$\vec{E}' = \vec{E}'_0 \cos(\omega' t + k' x)$$

На поверхні поділу дотичні компоненти безперервні

$$\vec{E}_\tau + \vec{E}'_\tau = 0 \Rightarrow$$

$$\vec{E}_{0\tau} \cos(\omega t - kx) + \vec{E}'_{0\tau} \cos(\omega t + kx) = 0$$

Звідси

$$\vec{E}'_{0\tau} = -\vec{E}_{0\tau}$$

$$\omega t - kx = \omega' t + k' x$$

$$k = \frac{\omega}{c}, \quad k' = \frac{\omega'}{c}$$

$$\omega \left(t - \frac{x}{c} \right) = \omega' \left(t + \frac{x}{c} \right)$$

Але

$$x = Vt$$

Тому

$$\omega \left(1 - \frac{V}{c} \right) = \omega' \left(1 + \frac{V}{c} \right)$$

Тому

$$\omega' = \omega \frac{(1 - V/c)}{(1 + V/c)}$$

22. Фотон з довжиною хвилі λ налітає на стаціонарний електрон (з масою m_e) і розсіюється з довжиною хвилі λ' під кутом θ (Комптонівське розсіювання). Знайти різницю довжин хвилі $\lambda' - \lambda$.

Нехай P_e^μ і P_γ^μ – імпульси електрона і фотона до розсіювання, та $\dot{P}_e^\mu$ і $\dot{P}_\gamma^\mu$ після розсіювання. Закон збереження 4-імпульсу дає

$$P_e^\mu + P_\gamma^\mu = \dot{P}_e^\mu + \dot{P}_\gamma^\mu$$

Звідси

$$(P_e^\mu + P_\gamma^\mu - \dot{P}_\gamma^\mu)^2 = \dot{P}_e^2 = m_e^2 c^2$$

де ми використовуємо формули

$$\dot{P}_e^2 = m_e^2 c^2, \quad \dot{P}_\gamma^2 = 0$$

$$m_e^2 c^2 + 2P_e^\mu P_\gamma^\mu - 2P_e^\mu \dot{P}_\gamma^\mu - 2P_\gamma^\mu \dot{P}_\gamma^\mu = \dot{P}_e^2 = m_e^2 c^2$$

або

$$P_e^\mu P_\gamma^\mu - P_e^\mu \dot{P}_\gamma^\mu - P_\gamma^\mu \dot{P}_\gamma^\mu = 0$$

В лабораторній системі маємо

$$P_e = (m_e c, 0)$$

$$P_\gamma = \left(\frac{\mathcal{E}}{c}, \vec{P} \right) = \left(\frac{\hbar \omega}{c}, \hbar \vec{k} \right) = \frac{\hbar}{2\pi} \left(\frac{\omega}{c}, \vec{k} \right) = \frac{\hbar \omega}{2\pi c} \left(1, c \frac{\vec{k}}{\omega} \right) = \frac{\hbar}{\lambda} \left(1, c \frac{\vec{k}}{\omega} \right) = \frac{\hbar}{\lambda} \left(1, c \frac{2\pi}{\omega \lambda} \vec{e}_\gamma \right) = \frac{\hbar}{\lambda} (1, \vec{e}_\gamma)$$

$$\begin{aligned}\mathcal{E} &= h\nu = \hbar\omega, \quad \hbar = \frac{h}{2\pi}, \quad \nu = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{ck}{2\pi}, \\ \vec{P} &= \hbar\vec{k}, \quad (|\vec{P}| = 2\pi\frac{\hbar}{\lambda}), \quad \vec{k} = \frac{2\pi}{\lambda}\vec{e}_\gamma \\ \lambda &= \frac{2\pi}{k} = \frac{2\pi}{\omega}c = \frac{c}{\nu}, \quad k = \frac{\omega}{c} = \frac{2\pi}{cT} = \frac{2\pi}{\lambda} \\ \omega &= \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi c}{\lambda}\end{aligned}$$

Ітак

$$\begin{aligned}P_e &= (m_e c, 0) \\ P_\gamma &= \frac{h}{\lambda}(1, \vec{e}_\gamma) \\ \dot{P}_\gamma &= \frac{h}{\dot{\lambda}}(1, \dot{\vec{e}}_\gamma) \\ \vec{e}_\gamma \cdot \dot{\vec{e}}_\gamma &= \cos\theta \\ c &= 1 \\ P_e \cdot P_\gamma - P_e \cdot \dot{P}_\gamma - P_\gamma \cdot \dot{P}_\gamma &= 0 \\ m_e c \frac{h}{\lambda} - m_e c \frac{h}{\dot{\lambda}} &= \frac{h^2}{\lambda \dot{\lambda}}(1 - \cos\theta) \\ \frac{m_e c}{\lambda} - \frac{m_e c}{\dot{\lambda}} &= \frac{h}{\lambda \dot{\lambda}}(1 - \cos\theta)\end{aligned}$$

Звідси

$$\begin{aligned}\dot{\lambda} - \lambda &= \frac{h}{m_e c}(1 - \cos\theta) \\ \dot{\lambda} - \lambda &= \lambda_k(1 - \cos\theta)\end{aligned}$$

Крім цього

$$\begin{aligned}\frac{m_e c}{\lambda} - \frac{m_e c}{\dot{\lambda}} - \frac{h}{\lambda \dot{\lambda}}(1 - \cos\theta) &= 0 \\ \lambda &= \frac{c}{\nu} \\ m_e \nu - m_e \dot{\nu} - \frac{h\nu\dot{\nu}}{c^2}(1 - \cos\theta) &= 0 \\ m_e \nu &= \left[m_e + \frac{h\nu}{c^2}(1 - \cos\theta) \right] \dot{\nu}\end{aligned}$$

Таким чином, при розсіянні фотона на вільному електроні частоти фотона ν і $\dot{\nu}$ (до і після розсіювання відповідно) пов'язані співвідношенням:

$$\dot{\nu} = \frac{\nu}{1 + \frac{h\nu}{m_e c^2}(1 - \cos\theta)}.$$

де θ – кут розсіювання (кут між напрямками поширення фотона до і після розсіювання).

Перейшовши до довжин хвиль:

$$\dot{\lambda} - \lambda = \lambda_k(1 - \cos\theta)$$

де

$$\lambda_k = \frac{h}{m_e c}$$

– комптонівська довжина хвилі електрона, що дорівнює

$$\lambda_k = 2,4263 \cdot 10^{-12} \text{ м.}$$

Зменшення енергії фотона в результаті комптонівського розсіювання називається комптонівським зсувом. Пояснення ефекту Комптона в рамках класичної електродинаміки неможливо, так як розсіювання електромагнітної хвилі на заряді (томсонівське розсіювання) не змінює її частоти.

17. Вивести закон перетворення кутів.

Перетворення швидкості для випадку руху системи K' відносно системи K зі швидкістю V відносно x ($\vec{V} = \{V, 0, 0\}$) має вигляд

$$\begin{aligned} v_x &= \frac{v'_x + V}{1 + v'_x V/c^2} \\ v_y &= \frac{v'_y \sqrt{1 - V^2/c^2}}{1 + v'_x V/c^2} \\ v_z &= \frac{v'_z \sqrt{1 - V^2/c^2}}{1 + v'_x V/c^2} \end{aligned}$$

Тут $\vec{v} = \{v_x, v_y, v_z\}$ – швидкість частинки. Виберемо осі координат, так щоб швидкість частинки в даний момент лежала у площині xy

Тоді швидкість частинки в системі K має компоненти $\{v_x = v \cos \theta, v_y = v \sin \theta, v_z = 0\}$. В системі K' маємо $\{v'_x = v' \cos \theta', v'_y = v' \sin \theta', v'_z = 0\}$.

Тоді

$$\begin{aligned} v \cos \theta &= \frac{v' \cos \theta' + V}{1 + v' \cos \theta' V/c^2} \\ v \sin \theta &= \frac{v' \sin \theta' \sqrt{1 - V^2/c^2}}{1 + v' \sin \theta' V/c^2} \end{aligned}$$

Звідси одержуємо

$$\tan \theta = \frac{v' \sin \theta' \sqrt{1 - V^2/c^2}}{v' \cos \theta' + V}$$

що і є шукане перетворення кутів. Ця формула визначає зміну напрямку швидкості при переході від однієї системи відліку до іншої.

18. Вивести формули для аберації світла. Розглянути нерелятивістський випадок, коли $V \ll c$.

Розглянемо відхилення світла при переході від однієї системи відліку до іншої. В цьому випадку $v = v' = c$ і формула з попередньої задачі набирає вигляд

$$\tan \theta = \frac{\sin \theta' \sqrt{1 - V^2/c^2}}{\cos \theta' + V/c}$$

Далі з формул перетворення швидкості маємо

$$\begin{aligned} \cos \theta &= \frac{\cos \theta' + V/c}{1 + (V/c) \cos \theta'} \\ \sin \theta &= \frac{\sqrt{1 - V^2/c^2}}{1 + (V/c) \cos \theta'} \sin \theta' \end{aligned}$$

У випадку $V \ll c$ звідси, з точністю до членів порядку V/c , маємо

$$\cos \theta = \frac{\cos \theta' + V/c}{1 + (V/c) \cos \theta'} \cong (\cos \theta' + V/c)(1 - (V/c) \cos \theta') \cong \cos \theta' + V/c - (V/c) \cos^2 \theta'$$

$$\sin \theta = \frac{\sqrt{1 - V^2/c^2}}{1 + (V/c) \cos \theta'} \sin \theta' \cong (1 - (V/c) \cos \theta') \sin \theta'$$

З останньої формули знаходимо

$$\sin \theta - \sin \theta' = -\frac{V}{c} \cos \theta' \sin \theta'$$

Введемо кут аберації

$$\Delta \theta = \theta' - \theta$$

Тоді для кута аберації маємо

$$\Delta \theta = \frac{V}{c} \cos \theta' \sin \theta'$$

19 Ракета рухається від Землі до α -Центаври, причому першу половину шляху з постійним прискоренням, а другу половину з постійним від'ємним прискоренням. Повернення ракети до Землі відбувається за аналогічною схемою. У просторі-часу світова лінія ракети має вигляд кривої склеєної з гіпербол. Знайти власний час подорожі, час відсутності на Землі та інше!

Завдання для усного розв'язку.

11. Як перетворюються осі координат при перетворенні Лоренца. Побудувати малюнки.

12. Вектор 4-швидкості, її компоненти і довжина. Перетворення 4-швидкості

13. Вектор 4-прискорення, та його компоненти.

14. Співвідношення між 4-швидкістю та 4-прискоренням. Показати на малюнку.

15. Ефект скорочення поздовжніх масштабів тіла. Ефект скорочення об'ємів.

16. Ефект уповільнення плину часу в рухомій системі відліку.

17. Вивести закон перетворення кутів.

18. Вивести формули для аберації світла.