

Матеріали до посібника Гладуша В. Д.
"Розв'язування задач з електродинаміки"
Магнітостатика
Основні рівняння

Закон Біо-Савара-Лапласа

$$d\vec{H}_1(\vec{r}_2) = \frac{[d\vec{I}_1, \vec{r}_2 - \vec{r}_1]}{c|\vec{r}_2 - \vec{r}_1|^3}$$

де $d\vec{I}_1 = I_1 d\vec{r}_1$.

$$\vec{H}(\vec{r}) = \frac{I}{c} \oint_L \frac{[d\vec{r}', \vec{r} - \vec{r}']}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3}$$

$$I d\vec{r} \rightarrow \vec{j}(\vec{r}') dv'$$

$$\vec{H}(\vec{r}) = \frac{1}{c} \int_D \frac{[\vec{j}(\vec{r}'), \vec{r} - \vec{r}']}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} dv'$$

Закон Ампера

$$d\vec{F}_{12} = \frac{1}{c} [d\vec{I}_2, \vec{H}_1(\vec{r}_2)]$$

$$\vec{F} = \frac{I}{c} \oint_L [d\vec{r}, \vec{H}(\vec{r})]$$

$$\vec{F} = \frac{1}{c} \int_D [\vec{j}(\vec{r}), \vec{H}(\vec{r})] dv'$$

Основні рівняння магнітостатики в напруженостях

$$\text{rot } \vec{H} = \frac{4\pi}{c} \vec{j}$$

$$\text{div } \vec{H} = 0$$

$$\text{div } \vec{j} = 0$$

Граничні умови

$$(\vec{n}, \vec{H}^{(2)} - \vec{H}^{(1)})_s = 0$$

$$[\vec{n}, \vec{H}^{(2)} - \vec{H}^{(1)}]_s = \frac{4\pi}{c} j$$

Основні рівняння магнітостатики для векторного потенціалу

$$\Delta \vec{A} = -\frac{4\pi}{c} \vec{j}$$

$$\vec{H} = \text{rot } \vec{A}$$

$$\text{div } \vec{j} = 0,$$

$$\text{div } \vec{A} = 0$$

Поля острівних систем

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{1}{c} \int_D \frac{\vec{j}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dv'$$

$$\vec{H}(\vec{r}) = \frac{1}{c} \int_D \frac{[\vec{j}(\vec{r}'), \vec{r} - \vec{r}']}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} dv'$$

або

$$\vec{H}(\vec{r}) = -\frac{1}{c} \sum_k I_k \oint_{L_k} \frac{[\vec{r} - \vec{r}', d\vec{r}']}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3}$$

де I_k – струм у k -ій трубці тока з контуром L_k

Теорема Стокса

$$\oint_l (\vec{H}(\vec{r}), d\vec{r}) = \frac{4\pi}{c} I$$

$$I = \int_S (\vec{j}, d\vec{S}), \quad I = \int_\gamma (\vec{i}, d\vec{l})$$

Вектор густини струму

$$\vec{j} = \rho \vec{V}$$

$$\vec{j}(\vec{r}) = \sum_a q_a \vec{V}_a \delta(\vec{r} - \vec{r}_a)$$

Енергия магнітного поля

$$W = \frac{1}{8\pi} \int_{\mathbb{R}^3} H^2 dv,$$

$$W = \frac{1}{2c} \int_D (\vec{A}, \vec{j}) dv, \quad \vec{j}(\vec{r}') dv' \rightarrow \vec{i} dS \rightarrow I d\vec{r}$$

$$W = \frac{1}{2c} \int_S (\vec{A}, \vec{i}) dS, \quad W = \frac{I}{2c} \int_\gamma (\vec{A}, d\vec{r})$$

Магнітна енергія взаємодії струмів

$$W_{int} = \frac{1}{c^2} \int_D \int_{D'} \frac{(\vec{j}_1(\vec{r}), \vec{j}_2(\vec{r}'))}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dV dV'$$

Векторний потенціал та напруженість магнітного поля на великих відстанях

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{[\vec{m}, \vec{r}]}{r^3}$$

$$\vec{H}(\vec{r}) = \frac{3(\vec{m}, \vec{r})\vec{r} - \vec{m}}{r^5}$$

де $\vec{m}$ – магнітний момент замкнутих струмів

$$\vec{m} = \frac{1}{2c} \int_D [\vec{r}', \vec{j}(\vec{r}')] dv'$$

$$\vec{m} = \sum_k \frac{I_k}{2c} \oint_{L_k} [\vec{r}', d\vec{r}']$$

$$\vec{m} = \frac{1}{2c} \sum_a q_a [\vec{r}_a, \vec{V}_a]$$

$$\vec{F} = e\vec{E} + \frac{e}{c} [\vec{V}, \vec{H}]$$

Перехід від систем CI до гаусової системи

$$\epsilon_0 \rightarrow \frac{1}{4\pi}, \quad \mu_0 = \frac{1}{\epsilon_0 c^2} \rightarrow \frac{4\pi}{c^2}$$

$$\vec{B} \rightarrow \frac{1}{c} \vec{H}$$

Задача 1 (№254а).

Знайти вектор магнітної напруженості $\vec{H}$ тонкого прямолінійного нескінченного провідника з током I .

Перший спосіб. Шукаємо магнітне поле $\vec{H}$ за допомогою інтегрального формулювання рівняння магнітостатики

$$\oint_L (\vec{H} d\vec{r}) = \frac{4\pi}{c} I$$

де, в силу циліндричної симетрії

$$\vec{H} = H(r) \vec{e}_\alpha$$

$$\vec{r} = r(\vec{i} \cos \alpha + \vec{j} \sin \alpha)$$

$$\vec{e}_r = \vec{i} \cos \alpha + \vec{j} \sin \alpha = \frac{x\vec{i} + y\vec{j}}{r}$$

$$\vec{e}_\alpha = -\vec{i} \sin \alpha + \vec{j} \cos \alpha = \frac{-y\vec{i} + x\vec{j}}{r}$$

$$L : \vec{r}(\alpha) = r(\vec{i} \cos \alpha + \vec{j} \sin \alpha) \Rightarrow$$

$$d\vec{r}(\alpha) = r(-\vec{i} \sin \alpha + \vec{j} \cos \alpha) d\alpha = r \vec{e}_\alpha d\alpha$$

Тоді

$$\oint_L (\vec{H} d\vec{r}) = \oint_L (H(r) \vec{e}_\alpha, r \vec{e}_\alpha d\alpha) = \oint_L H(r) r d\alpha = 2\pi H(r) r = \frac{4\pi}{c} I$$

Звідси

$$H(r) = \frac{2I}{cr}$$

$$\vec{H} = H(r) \vec{e}_\alpha = \frac{2I}{cr} \vec{e}_\alpha$$

Другий спосіб. Путем использования принципа суперпозиции и прямого интегрирования

Геометрія і симетрія системи. Нехай провідник з током направлено уздовж вісі OZ . Система, а значить, і поле не чутливі до сдвигу

$$z \rightarrow z + a$$

Звідси випливає, що шукане поле не залежить від z .

$$\vec{H}(\vec{r}) = \vec{H}(x, y)$$

Закон Біо-Савара-Лапласа для елементарного току

$$d\vec{H}(\vec{r}) = \frac{[d\vec{l}, \vec{r}_2 - \vec{r}_1]}{c|\vec{r}_2 - \vec{r}_1|^3}$$

Для тонкого прямолінійного нескінченного провідника з током I

$$\vec{H}(x, y) = \int_l \frac{[d\vec{l}, \vec{r} - \vec{r}']}{c|\vec{r} - \vec{r}'|^3}$$

Виберемо деяку точку з радіусом-вектором

$$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$$

в якості точки спостереження. Проведемо через цю точку площину ортогональну вісі OZ . Використовуючи вказану інваріантність, виберемо початок координат у точці перетину вказаної площини і вісі OZ . Тоді

$$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j}, \quad \vec{r}' = z'\vec{k}$$

$$d\vec{l} = Idz'\vec{k}$$

$$\vec{r} - \vec{r}' = x\vec{i} + y\vec{j} - z'\vec{k}, \quad |\vec{r} - \vec{r}'| = x^2 + y^2 + z'^2 = r^2 + z'^2$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$[\vec{i}, \vec{j}] = \vec{k} \Rightarrow [\vec{k}, \vec{i}] = \vec{j} \Rightarrow [\vec{j}, \vec{k}] = \vec{i}$$

$$\vec{H}(x, y) = \frac{I}{c} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{[dz'\vec{k}, x\vec{i} + y\vec{j} - z'\vec{k}]}{|r^2 + z'^2|^{3/2}} = \frac{I}{c} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(x\vec{j} - y\vec{i})dz'}{|r^2 + z'^2|^{3/2}} =$$

$$= \frac{I}{c} (x\vec{j} - y\vec{i}) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dz'}{|r^2 + z'^2|^{3/2}} = \frac{I}{c} (x\vec{j} - y\vec{i}) A$$

$$A = - \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d(z - z')}{|r^2 + z'^2|^{3/2}} = - \int_{-\infty}^{\infty} \frac{du}{|r^2 + z'^2|^{3/2}}$$

$$z - z' = u = r \tan \beta \Rightarrow -\frac{\pi}{2} < \beta < \frac{\pi}{2}$$

$$du = \frac{r d\beta}{\cos^2 \beta}$$

$$A = - \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{1}{|r^2 + r^2 \tan^2 \beta|^{3/2}} \frac{r d\beta}{\cos^2 \beta} = - \frac{1}{r^2} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{1}{|1 + \tan^2 \beta|^{3/2}} \frac{d\beta}{\cos^2 \beta} = - \frac{1}{r^2} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{\cos^3 \beta}{\cos^2 \beta} d\beta = \frac{1}{r^2} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos \beta d\beta$$

$$A = \frac{1}{r^2} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos \beta d\beta = \frac{1}{r^2} \sin \beta \Big|_{-\pi/2}^{\pi/2} = \frac{2}{r^2} = \frac{2}{x^2 + y^2}$$

$$\vec{H}(x, y) = \frac{I}{c} (x\vec{j} - y\vec{i}) A = \frac{2I}{c} \frac{(x\vec{j} - y\vec{i})}{r^2}$$

$$\vec{e}_\alpha = \frac{-i\vec{y} + j\vec{x}}{r} = -i\sin\alpha + j\cos\alpha$$

$$\vec{H}(x,y) = \frac{2I}{c} \frac{(x\vec{j} - y\vec{i})}{r^2} = \frac{2I}{c} \frac{\vec{e}_\alpha}{r}$$

В системе СИ (проверка)

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \frac{(x\vec{j} - y\vec{i})}{r^2} = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \frac{\vec{e}_\alpha}{r}$$

$$\varepsilon_0 \rightarrow \frac{1}{4\pi}, \quad \mu_0 = \frac{1}{\varepsilon_0 c^2} \rightarrow \frac{4\pi}{c^2}, \quad \vec{B} \rightarrow \frac{1}{c} \vec{H}$$

$$\frac{1}{c} \vec{H} = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \vec{e}_\alpha = \frac{2I}{c^2} \frac{\vec{e}_\alpha}{r} \Rightarrow \vec{H} = \frac{2I}{c} \frac{\vec{e}_\alpha}{r}$$

Задача 2 (№254b).

Знайти векторний потенціал магнітного поля $\vec{A}$ прямолінійного нескінченного тонкого провідника з током I .

Перший спосіб. Побудуємо розв'язок рівняння Пуассона для векторного потенціала

$$\Delta \vec{A} = -\frac{4\pi}{c} \vec{j}$$

$$\vec{j} = I k \delta(x) \delta(y)$$

$$\vec{A} = A(r) \vec{k}$$

$$\Delta A \vec{k} = -\frac{4\pi}{c} I k \delta(x) \delta(y)$$

$$\Delta A = -\frac{4\pi}{c} I \delta(x) \delta(y)$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} > 0$$

$$\Delta A(r) = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r \frac{\partial A(r)}{\partial r} = 0 \Rightarrow$$

$$r \frac{\partial A(r)}{\partial r} = C_1 \Rightarrow \frac{dA(r)}{dr} = \frac{C_1}{r} \Rightarrow$$

$$A(r) = C_1 \ln r + C_2$$

$$\Delta A = \frac{\partial^2 A}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A}{\partial y^2} = \operatorname{div} \operatorname{grad} A = -\frac{4\pi}{c} I \delta(x) \delta(y)$$

$$\int_S \operatorname{div} \operatorname{grad} A dx dy = -\frac{4\pi}{c} I \int \delta(x) \delta(y) dx dy = -\frac{4\pi}{c} I$$

Нехай

$$\operatorname{grad} A = \frac{\partial A}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial A}{\partial y} \vec{j} = \left\{ \frac{\partial A}{\partial x}, \frac{\partial A}{\partial y} \right\} = \{A_x, A_y\}$$

$$\int_S \operatorname{div} \operatorname{grad} A dx dy = \int_S \left(\frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} \right) dx dy = \oint_l (A_x dy - A_y dx) =$$

Використуємо

$$A(r) = C_1 \ln r + C_2$$

Тоді

$$\Rightarrow (A_x dy - \partial A_y dx) = \frac{\partial A(r)}{\partial x} dy - \frac{\partial A(r)}{\partial y} dx = \frac{dA}{dr} \left(\frac{\partial r}{\partial x} dy - \frac{\partial r}{\partial y} dx \right) = \\ = \frac{C_1}{r^2} (x dy - y dx)$$

Заміна

$$x = r \cos \alpha. \quad y = r \sin \alpha$$

Отже

$$\int_S \operatorname{div} \operatorname{grad} A dx dy = \oint_l \frac{C_1}{r^2} (x dy - y dx) = C_1 \int_0^{2\pi} (\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha) d\alpha = 2\pi C_1$$

Таким чином, із співвідношення

$$\int_S \operatorname{div} \operatorname{grad} A dx dy = -\frac{4\pi}{c} I$$

випливає

$$2\pi C_1 = -\frac{4\pi}{c} I \Rightarrow \\ C_1 = -\frac{2}{c} I$$

Шуканий векторний потенціал має вигляд

$$A(r) = -\frac{2I}{c} \ln r + C_2$$

Покладемо

$$C_2 = 0 \Rightarrow$$

Так що

$$A(r) = -\frac{2I}{c} \ln r \\ \vec{A} = A(r) \vec{k} = -\frac{2I}{c} \ln r \vec{k}$$

Другий спосіб. Використаємо визначення

$$\vec{H} = \operatorname{rot} \vec{A}$$

та розв'язок задачі 1:

$$\vec{H} = \frac{2I}{c} \frac{\vec{e}_a}{r}$$

Оскільки

$$\vec{H} = \vec{H}(r) \quad \vec{A} = A(r) \vec{k}$$

то $\vec{k}$

$$\vec{H} = \operatorname{rot} \vec{A} = \det \begin{pmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 0 & 0 & A(r) \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} \vec{i} & \vec{j} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \end{pmatrix} A(r) = \vec{i} \frac{\partial A(r)}{\partial y} - \vec{j} \frac{\partial A(r)}{\partial x}$$

$$\vec{H} = \vec{i} \frac{\partial A(r)}{\partial y} - \vec{j} \frac{\partial A(r)}{\partial x} = \frac{dA}{dr} \left(\vec{i} \frac{\partial r}{\partial y} - \vec{j} \frac{\partial r}{\partial x} \right) = \frac{dA}{dr} \frac{y\vec{i} - x\vec{j}}{r} = -\frac{dA}{dr} \vec{e}_a$$

Де ми використали формулу (див. задачу 1)

$$\vec{e}_\alpha = \frac{-y\vec{i} + x\vec{j}}{r}$$

Використовую розв'язок задачі 1, маємо

$$\vec{H} = H\vec{e}_\alpha = \frac{2I}{c} \frac{\vec{e}_\alpha}{r}$$

$$H = \frac{2I}{cr}$$

Звідси, та з попереднього результату, маємо

$$\vec{H} = H\vec{e}_\alpha = -\frac{dA}{dr}\vec{e}_\alpha$$

Таким чином

$$H = -\frac{dA}{dr} \Rightarrow$$

$$A = -\int Hdr + C$$

Нарешті одержуємо

$$A = -\int \frac{2I}{cr} dr + C = -\frac{2I}{c} \ln \frac{r}{r_0}$$

де

$$C = \frac{2I}{c} \ln r_0 =$$

і r_0 та C – деякі константи. звичайно покладають $C = 0$ або $r_0 = 1$.

Так що

$$\vec{A} = A(r)\vec{k} = -\frac{2I}{c} \ln r \vec{k}$$

Задача 3. (242).

Знайти вектор магнітної напруженості $\vec{H}$, який породжується постійним током I , що тече у прямолінійному нескінченному суцільному провіднику з радіусом a .

Враховуючи симетрію і геометрію системи, шукаємо магнітне поле у вигляді

$$\vec{H} = \vec{e}_\alpha \begin{cases} H^{(1)}(r), & r < a \\ H^{(2)}(r), & r > a \end{cases}$$

Як у задачі 1, у загальному випадку маємо

$$2\pi H(r)r = \frac{4\pi}{c} I(r)$$

Для області $r < a$

$$r < a, \quad I(r) = \int_{S_r} \vec{j} d\vec{s} = \int_{S_r} j(r) ds = j(r) \int_{S_r} ds = j(r) S_r = 4\pi r^2 j$$

$$j(r) = j = \text{const}$$

$$I = 4\pi a^2 j \Rightarrow \frac{I(r)}{I} = \frac{r^2}{a^2} \Rightarrow$$

$$I(r) = I \frac{r^2}{a^2}$$

$$2\pi H(r)r = \frac{4\pi}{c} I(r) = \frac{4\pi I}{c} \frac{r^2}{a^2}, \quad r < a$$

$$H(r) = \frac{2I}{c} \frac{r}{a^2}, \quad r < a$$

Аналогічно для області $r > a$ знаходимо

$$2\pi H(r)r = \frac{4\pi}{c}I, \quad r > a \Rightarrow$$

$$H(r) = \frac{2I}{cr}, \quad r > a$$

Таким чином, повне поле має вигляд

$$\vec{H} = \vec{e}_\alpha \begin{cases} \frac{2I}{c} \frac{r}{a^2}, & r < a \\ \frac{2I}{c} \frac{1}{r}, & r > a \end{cases}$$

Задача 4. (243).

Знайти вектор магнітної напруженості $\vec{H}$, який породжується постійним током I , що тече по поверхні прямолінійного нескінченного порожнистого провідника з радіусом a .

Шукаємо магнітної поле $\vec{H}$ за допомогою інтегрального формулювання рівняння магнітостатики

$$\oint_L (\vec{H} d\vec{r}) = \frac{4\pi}{c}I$$

де, в силу циліндричної симетрії

$$\vec{H} = H(r)\vec{e}_\alpha$$

$$\vec{r} = r(\vec{i} \cos \alpha + \vec{j} \sin \alpha)$$

$$\vec{e}_\alpha = -\vec{i} \sin \alpha + \vec{j} \cos \alpha$$

$$\vec{r}(\alpha) = r(\vec{i} \cos \alpha + \vec{j} \sin \alpha) \Rightarrow$$

$$d\vec{r}(\alpha) = r(-\vec{i} \sin \alpha + \vec{j} \cos \alpha) d\alpha = r\vec{e}_\alpha d\alpha$$

Тоді

$$\oint_L (\vec{H} d\vec{r}) = \oint_L (H(r)\vec{e}_\alpha, r\vec{e}_\alpha d\alpha) = \oint_L H(r)r d\alpha = 2\pi H(r)r = \frac{4\pi}{c}I$$

Звідси, для області $r > a$, одержуємо

$$H(r) = \frac{2I}{cr}, \quad r > a$$

В той час, як для області $r < a$, маємо

$$H(r) = 0, \quad r < a$$

Таким чином

$$\vec{H} = \vec{e}_\alpha \begin{cases} 0, & r < a \\ \frac{2I}{cr}, & r > a \end{cases}$$

Задача 5 (241)

Усередині тонкої провідної оболонки радіусу b знаходиться коаксіальний з нею провід радіусу a . По цих провідниках течуть постійні токи однакової величини I у протилежних напрямках. Знайти напруженість магнітного поля $\vec{H}$ цієї системи.

Враховуючи симетрію і геометрію системи, шукаємо магнітне поле у вигляді

$$\vec{H} = \vec{e}_\alpha \begin{cases} H^{(1)}(r), & r < a \\ H^{(2)}(r), & a < r < b \\ H^{(3)}(r), & r > b \end{cases}$$

Як у задачі 1, із інтегральної формули магнітостатики

$$\oint_L (\vec{H} d\vec{r}) = \frac{4\pi}{c} I$$

у загальному випадку маємо

$$2\pi H(r)r = \frac{4\pi}{c} I(r)$$

Далі для області $r < a$ знаходимо

$$I(r) = \int_{S_r} \vec{j} d\vec{S} = \int_{S_r} j(r) ds = j(r) \int_{S_r} ds = j(r) S_r = 4\pi r^2 j$$

$$j(r) = j = \text{const}, \quad I(r) = 4\pi r^2 j \Rightarrow$$

$$I = I(a) = 4\pi a^2 j \Rightarrow \frac{I(r)}{I} = \frac{r^2}{a^2} \Rightarrow$$

Так, що

$$I(r) = I \frac{r^2}{a^2}$$

Тоді

$$2\pi H^{(1)}(r)r = \frac{4\pi}{c} I(r) = \frac{4\pi I}{c} \frac{r^2}{a^2}, \quad r < a$$

$$H^{(1)}(r) = \frac{2I}{c} \frac{r}{a^2}, \quad r < a$$

Для області $a < r < b$ знаходимо

$$2\pi H^{(2)}(r)r = \frac{4\pi}{c} I \Rightarrow$$

$$H^{(2)}(r) = \frac{2I}{cr}, \quad a < r < b$$

Нарешті, для області $r > b$ знаходимо

$$2\pi H^{(3)}(r)r = 0 \Rightarrow$$

$$H^{(3)}(r) = 0, \quad r > b$$

Таким чином, повне поле для усього простору буде

$$\vec{H} = \vec{e}_\alpha \begin{cases} H^{(1)}(r) = \frac{2Ir}{ca^2}, & r < a \\ H^{(2)}(r) = \frac{2I}{cr}, & a < r < b \\ H^{(3)}(r) = 0, & r > b \end{cases}$$

Задача 6 (241а)

По поверхні нескінченної циліндричної оболонки радіуса R тече постійний струм I_1 , усередині оболонки на осі знаходиться нескінченний тонкий провідник з постійним током I_2 , що тече у протилежному напрямку. Знайти напруженість магнітного поля $\vec{H}$ системи.

Враховуючи симетрію і геометрію системи, шукаємо магнітне поле у вигляді

$$\vec{H} = \vec{e}_a \begin{cases} H^{(1)}(r), & r < R \\ H^{(2)}(r), & r > R \end{cases}$$

Як у задачі 1, із інтегральної формули магнітостатики

$$\oint_L (\vec{H} d\vec{r}) = \frac{4\pi}{c} I$$

у загальному випадку маємо

$$2\pi H(r)r = \frac{4\pi}{c} I(r)$$

Далі, для області $r < R$ знаходимо

$$I(r) = I$$

Тоді

$$2\pi H^{(1)}(r)r = \frac{4\pi}{c} I, \quad r < R \Rightarrow$$

$$H^{(1)}(r) = \frac{2I}{cr}, \quad r < R$$

Для області $r > R$ знаходимо

$$I(r) = 0 \Rightarrow$$

$$H^{(2)}(r) = 0, \quad r > R$$

Таким чином, повне поле

$$\vec{H} = \vec{e}_a \begin{cases} H^{(1)}(r) = \frac{2I}{cr}, & r < R \\ H^{(2)}(r) = 0, & r > R \end{cases}$$

Задача 7 (246)

Знайти векторний потенціал $\vec{A}$ і напруженість магнітного поля $\vec{H}$, які створюються двома прямолінійними паралельними струмами I , що течуть в протилежних напрямках. Відстань між струмами $2a$.

Векторний потенціал $\vec{A}$ системи запишемо у вигляді

$$\vec{A} = \vec{A}_1 + \vec{A}_2$$

де, згідно задачі 2, векторні потенціали струмів можна записати таким чином

$$\vec{A}_1 = -\frac{2I}{c}(\ln r_1)\vec{k}, \quad \vec{A}_2 = \frac{2I}{c}(\ln r_2)\vec{k}$$

Тоді

$$\vec{A} = -\frac{2I}{c}(\ln r_1)\vec{k} + \frac{2I}{c}(\ln r_2)\vec{k} = \frac{2I}{c} \ln \frac{r_2}{r_1} \vec{k}$$

$$A_z = \frac{2I}{c} \ln \frac{r_2}{r_1}$$

Відповідно до геометрії системи, радіуси вектори струмів пов'язані співвідношенням

$$\vec{r}_1 = \vec{r}_2 + 2\vec{a}$$

Тут $\vec{r}_1$ – вектор, що з'єднує струм I_1 з точкою спостереження $\vec{r}$, а $\vec{r}_2$ – вектор, що з'єднує струм I_2 з точкою спостереження $\vec{r}$. Нехай вектор $\vec{r}$ з'єднує початок координат з точкою спостереження. Вибіримо початок координат на площині

$z = \text{const}$ посередині, між струмами I_1 і I_2 . Тоді

$$\vec{r}_1 = \vec{r} + \vec{a}, \quad \vec{r}_2 = \vec{r} - \vec{a}$$

Оскільки

$$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j}, \quad \vec{r}_1 = x_1\vec{i} + y_1\vec{j}, \quad \vec{r}_2 = x_2\vec{i} + y_2\vec{j}, \quad \vec{a} = a\vec{i}$$

то

$$y = y_1 = y_2$$

$$x_1 = x + a, \quad x_2 = x - a$$

Таким чином

$$r_1^2 = (x + a)^2 + y^2, \quad r_2^2 = (x - a)^2 + y^2$$

Тоді

$$A_z = \frac{2I}{c} \ln \frac{r_2}{r_1} = \frac{I}{c} \ln \frac{(x - a)^2 + y^2}{(x + a)^2 + y^2}$$

Звідси знаходимо магнітне поле

$$\vec{H} = \text{rot } \vec{A} = \det \begin{pmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 0 & 0 & A_z \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} \vec{i} & \vec{j} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \end{pmatrix} A = \vec{i} \frac{\partial A}{\partial y} - \vec{j} \frac{\partial A}{\partial x}$$

$$\begin{aligned} H_x &= \frac{\partial A}{\partial y} = \frac{I}{c} \frac{\partial}{\partial y} \ln \frac{(x - a)^2 + y^2}{(x + a)^2 + y^2} = \frac{I}{c} \left\{ \frac{\partial}{\partial y} \ln [(x - a)^2 + y^2] - \frac{\partial}{\partial y} \ln [(x + a)^2 + y^2] \right\} = \\ &= \frac{I}{c} \left\{ \frac{2y}{(x - a)^2 + y^2} - \frac{2y}{(x + a)^2 + y^2} \right\} = \frac{2Iy}{c} \frac{(x + a)^2 - (x - a)^2}{r_1^2 r_2^2} = \frac{8Iy}{c} \frac{xa}{r_1^2 r_2^2} \end{aligned}$$

Отже

$$H_x = \frac{8I}{c} \frac{axy}{r_1^2 r_2^2}$$

Далі

$$\begin{aligned} H_y &= -\frac{\partial A}{\partial x} = -\frac{I}{c} \frac{\partial}{\partial x} \ln \frac{(x - a)^2 + y^2}{(x + a)^2 + y^2} = \\ &= \frac{I}{c} \left\{ \frac{\partial}{\partial x} \ln [(x + a)^2 + y^2] - \frac{\partial}{\partial x} \ln [(x - a)^2 + y^2] \right\} = \frac{2I}{c} \left\{ \frac{x + a}{r_1^2} - \frac{x - a}{r_2^2} \right\} \end{aligned}$$

Таким чином, сумарне магнітне поле має вид

$$A_z = \frac{2I}{c} \ln \frac{r_2}{r_1} = \frac{I}{c} \ln \frac{(x - a)^2 + y^2}{(x + a)^2 + y^2}$$

$$H_x = \frac{8I}{c} \frac{axy}{r_1^2 r_2^2}$$

$$H_y = \frac{2I}{c} \left\{ \frac{x + a}{r_1^2} - \frac{x - a}{r_2^2} \right\}$$

Задача 8 (244).

Прямолінійна, нескінченно довга смуга має ширину a . Уздовж смуги тече струм I , рівномірно розподілений по її ширині. Знайти магнітне поле $\vec{H}$.

Магнітне поле прямолінійного нескінченного тонкого провідника з током I є

$$\vec{H} = \frac{2I}{cr} \vec{e}_a$$

$$\vec{e}_a = -\vec{i} \sin \alpha + \vec{j} \cos \alpha = \frac{-\vec{i}y + \vec{j}x}{r}$$

$$\vec{H} = \frac{2I}{c} \frac{-\vec{i}y + \vec{j}x}{r^2}$$

Поле смуги з током є

$$\vec{H} = \int d\vec{H}$$

де

$$d\vec{H} = \frac{2}{c} \frac{-\vec{i}Y + \vec{j}X}{R^2}$$

магнітне поле тока dI стрічки шириною a

$$\vec{R} = \vec{r} - \vec{r}' = (x - x')\vec{i} + (y - y')\vec{j} = X\vec{i} + Y\vec{j}$$

$$X = x - x', \quad Y = y - y'$$

Смуга зорієнтована уздовж вісі $\vec{OZ}$, площина смуги паралельна вісі $\vec{OY}$, перпендикулярна вісі $\vec{OX}$, середина смуги проходить через начало системи координат O .

$$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} - \text{точка спостереження}$$

$$\vec{r}' = y'\vec{j} - \text{текущая точка нахождения тока}$$

$$-a/2 < y' < a/2$$

$$\vec{R} = x\vec{i} + (y - y')\vec{j}$$

$$d\vec{H} = \frac{2}{c} \frac{-\vec{i}Y + \vec{j}X}{R^2} dI$$

$$dI = idy' = \frac{I}{a} dy'$$

$$d\vec{H} = \frac{2I}{ca} \frac{-\vec{i}(y - y') + \vec{j}x}{R^2} dy'$$

$$\vec{H} = \frac{2I}{ca} \int_{-a/2}^{a/2} \frac{-\vec{i}(y - y') + \vec{j}x}{x^2 + (y - y')^2} dy' = H_x \vec{i} + H_y \vec{j}$$

$$H_x = -\frac{2I}{ca} \int_{-a/2}^{a/2} \frac{(y - y')}{x^2 + (y - y')^2} dy'$$

$$H_y = \frac{2Ix}{ca} \int_{-a/2}^{a/2} \frac{dy'}{x^2 + (y - y')^2} = \frac{2Ix}{ca} \int_{-a/2-y}^{a/2-y} \frac{du}{x^2 + u^2} = \frac{2Ix}{ca} A$$

$$u = y' - y$$

$$\int \frac{du}{x^2 + u^2} = \frac{1}{x} \arctan \frac{u}{x}$$

$$A = \frac{1}{x} \arctan \frac{u}{x} \Big|_{-a/2-y}^{a/2-y} = \frac{1}{x} \left[\arctan \frac{(a/2-y)}{x} - \arctan \frac{(-a/2-y)}{x} \right] =$$

$$= \frac{1}{x} \left[\arctan \frac{(y+a/2)}{x} - \arctan \frac{(y-a/2)}{x} \right]$$

$$Ax = \arctan \frac{(y+a/2)}{x} - \arctan \frac{(y-a/2)}{x} = \arctan \frac{\frac{(y+a/2)}{x} - \frac{(y-a/2)}{x}}{1 + \frac{(y+a/2)}{x} \cdot \frac{(y-a/2)}{x}} =$$

$$= \arctan \frac{x[(y+a/2) - (y-a/2)]}{x^2 + (y+a/2)(y-a/2)} = \arctan \frac{ax}{x^2 + y^2 - a^2/4}$$

$$A = \frac{1}{x} \arctan \frac{ax}{x^2 + y^2 - a^2/4}$$

$$H_y = \frac{2Ix}{ca} A = \frac{2I}{ca} \arctan \frac{ax}{x^2 + y^2 - a^2/4}$$

$$H_x = -\frac{2I}{ca} \int_{-a/2}^{a/2} \frac{(y-y')}{x^2 + (y-y')^2} dy' = \frac{2I}{ca} B$$

$$u = y' - y \Rightarrow du = dy'$$

$$B = \int_{-a/2}^{a/2} \frac{(y'-y)}{x^2 + (y'-y)^2} dy' = \int_{-a/2-y}^{a/2-y} \frac{udu}{x^2 + u^2} = \frac{1}{2} \ln(x^2 + u^2) \Big|_{-a/2-y}^{a/2-y}$$

$$B = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{x^2 + (a/2-y)^2}{x^2 + (a/2+y)^2} \right)$$

$$H_x = \frac{2I}{ca} B = \frac{I}{ca} \ln \left(\frac{x^2 + (a/2-y)^2}{x^2 + (a/2+y)^2} \right)$$

Ответ

$$H_x = \frac{I}{ca} \ln \left(\frac{x^2 + (a/2-y)^2}{x^2 + (a/2+y)^2} \right)$$

$$H_y = \frac{2I}{ca} \arctan \frac{ax}{x^2 + y^2 - a^2/4}$$

$$H_z = 0$$

Задача 9 (259)

Знайти питому (на одинцю довжини) силу взаємодії двох паралельних нескінченних прямих токів I_1 і I_2 з відстанню a між ними.

Закон Ампера для елементарного тока

$$d\vec{F} = \frac{1}{c} [d\vec{I}_1, \vec{H}_2]$$

$$d\vec{I}_1 = dI_1 d\vec{r} = I_1 dz_1 \vec{k}$$

$$\vec{H}_2(r_2) = \frac{2I_2}{cr_2} \vec{e}_{2\alpha}$$

$$\vec{e}_{2\alpha} = -\vec{i} \sin \alpha_2 + \vec{j} \cos \alpha_2 = \frac{-\vec{i}y_2 + \vec{j}x_2}{r_2}$$

$$\vec{H} = \frac{2I_2}{c} \frac{-i\vec{y}_2 + j\vec{x}_2}{r_2^2}$$

$$\vec{H}_2(\vec{a}) = \frac{2I_2}{ca} \vec{e}_{2a}$$

$$d\vec{F} = \frac{1}{c} [d\vec{I}_1, \vec{H}_2] = \frac{1}{c} \left[I_1 dz_1 \vec{k}, \frac{2I_2}{ca} \vec{e}_{2a} \right] = \frac{2I_2 I_1}{c^2 a} [\vec{k}, \vec{e}_{2a}] dz_1$$

Враховуючи

$$\vec{e}_\alpha = -\vec{i} \sin \alpha + \vec{j} \cos \alpha$$

$$\vec{e}_r = \vec{i} \cos \alpha + \vec{j} \sin \alpha$$

маємо

$$\frac{d\vec{F}}{dz_1} = \frac{2I_2 I_1}{c^2 a} [\vec{k}, \vec{e}_{2a}] = \frac{2I_2 I_1}{c^2 a} [\vec{k}, \vec{e}_\alpha] = \frac{2I_2 I_1}{c^2 a} [\vec{k}, -\vec{i} \sin \alpha + \vec{j} \cos \alpha] = \frac{2I_2 I_1}{c^2 a} (-\vec{j} \sin \alpha - \vec{i} \cos \alpha) = -\frac{2I_2 I_1}{c^2 a} \vec{e}_r$$

$$\frac{d\vec{F}}{dz_1} = -\frac{2I_2 I_1}{c^2 a} \vec{e}_r$$

$$\left| \frac{d\vec{F}}{dz_1} \right| = \frac{2I_2 I_1}{c^2 a}$$

В системі СИ

$$\left| \frac{d\vec{F}}{dz_1} \right| = \frac{\mu_0 I_2 I_1}{2\pi a}$$

Перехід із СИ в гаусову $\mu_0 = \frac{1}{\epsilon_0 c^2} \rightarrow \frac{4\pi}{c^2}$

$$\left| \frac{d\vec{F}}{dz_1} \right| = \frac{\mu_0 I_2 I_1}{2\pi a} \rightarrow \frac{4\pi}{c^2} \frac{I_2 I_1}{2\pi a} = \frac{2I_2 I_1}{c^2 a}$$

Задача 10 (00)

Знайти магнітний момент замкнутого тонкого провідника (кільця) з током I .

Радіус кільця R .

$$m = \frac{1}{2c} \int_D [\vec{r}, \vec{j}] dv$$

$$\vec{j} dv \rightarrow \vec{j} dr dS \rightarrow j dS d\vec{r} = I d\vec{r}$$

$$\vec{m} = \frac{I}{2c} \oint [\vec{r}, d\vec{r}]$$

$$\vec{b} = \overrightarrow{const}$$

$$(\vec{b}, \vec{m}) = \frac{I}{2c} \oint (\vec{b}, [\vec{r}, d\vec{r}]) = \frac{I}{2c} \oint (\vec{b}, \vec{r}, d\vec{r}) = \frac{I}{2c} \oint (d\vec{r}, \vec{b}, \vec{r}) = \frac{I}{2c} \oint (d\vec{r}, [\vec{b}, \vec{r}])$$

$$(\vec{b}, \vec{m}) = \frac{I}{2c} \oint_L ([\vec{b}, \vec{r}], d\vec{r}) = \frac{I}{2c} \int_S (rot[\vec{b}, \vec{r}], d\vec{s})$$

$$rot[\vec{b}, \vec{r}] = 2\vec{b}$$

$$(\vec{b}, \vec{m}) = \frac{I}{c} \int_S (\vec{b}, d\vec{s}) \Rightarrow \left(\vec{b}, \vec{m} - \frac{I}{c} \int_S d\vec{s} \right) = 0 \Rightarrow$$

$$\vec{m} = \frac{I}{c} \int_S d\vec{S} = \frac{I}{c} \int_S \vec{n} ds$$

Контур плоский

$$\vec{n} = \overrightarrow{const}$$

$$\vec{m} = \vec{n} \frac{I}{c} \int_S ds = \frac{IS}{c} \vec{n}$$

$$\vec{m} = m\vec{n}$$

$$m = \frac{1}{c} IS$$

Задача 11 (256a)

Знайти силу $\vec{F}$, що діє на замкнутий тонкий провідник з током в однорідному магнітному полі $\vec{H} = \overrightarrow{const}$.

Закон Ампера для елементарного тока

$$d\vec{F} = \frac{1}{c} [d\vec{l}_1, \vec{H}_2]$$

Закон Ампера для замкнутого провідника з током

$$\vec{F} = \frac{I}{c} \oint_L [d\vec{r}, \vec{H}(r)]$$

Нехай

$$\vec{b} = \overrightarrow{const}$$

Тоді

$$(\vec{b}, \vec{F}) = \frac{I}{c} \oint_L (\vec{b}, [d\vec{r}, \vec{H}]) = \frac{I}{c} \oint_L (\vec{b}, d\vec{r}, \vec{H}) = \frac{I}{c} \oint_L (d\vec{r}, \vec{b}, \vec{H}) = \frac{I}{c} \oint_L (d\vec{r}, [\vec{b}, \vec{H}]) = \frac{I}{c} \oint_L ([\vec{b}, \vec{H}], d\vec{r})$$

За теоремою Стокса

$$(\vec{b}, \vec{F}) = \frac{I}{c} \int_S (rot[\vec{b}, \vec{H}], d\vec{S})$$

$$rot[\vec{b}, \vec{H}] = 0$$

$$(\vec{b}, \vec{F}) = 0, \quad \forall \vec{b} \Rightarrow$$

$$\vec{F} = 0$$

Задача 12 (256b)

Знайти момент $\vec{N}$, що діє на замкнутий тонкий провідник з током в однорідному магнітному полі $\vec{B} = \overrightarrow{const}$.

Момент $d\vec{N}$, що діє на елементарний ток $d\vec{l}_1 = I_1 d\vec{r}_1$ у магнітному полі $\vec{H}$ можна знайти за формулою

$$d\vec{N} = [\vec{r}, d\vec{F}]$$

де

$$d\vec{F} = \frac{1}{c} [\vec{dl}, \vec{H}] = \frac{1}{c} [d\vec{r}, \vec{H}]$$

сила, що діє на елементарний ток (див задачу 11). Тому для елементарного моменту маємо

$$d\vec{N} = \frac{I}{c} [\vec{r}, [d\vec{r}, \vec{H}]]$$

Повний момент

$$\vec{N} = \frac{I}{c} \oint_L [\vec{r}, [d\vec{r}, \vec{H}]] = \frac{I}{c} \oint_L [(\vec{r}, \vec{H}) d\vec{r} - \vec{H}(\vec{r}, d\vec{r})] = \frac{I}{c} \oint_L (\vec{r}, \vec{H}) d\vec{r} - \frac{I}{c} \oint_L \vec{H}(\vec{r}, d\vec{r})$$

Останній інтеграл дорівнює нулю, оскільки відповідно до теореми Стокса, маємо

$$\oint_L \vec{H}(\vec{r}, d\vec{r}) = \oint_S (\text{rot } \vec{r}, d\vec{S}) = 0$$

Отже

$$\vec{N} = \frac{I}{c} \oint_L (\vec{r} \cdot \vec{H}) d\vec{r}$$

Щоб обчислити цей інтеграл помножимо обидві частини цієї рівності скалярно на деякий вектор $\vec{a} = \text{const}$. Це дає

$$(\vec{a} \cdot \vec{N}) = \frac{I}{c} \oint_L (\vec{a} \cdot (\vec{r} \cdot \vec{H}) d\vec{r}) = \frac{I}{c} \oint_L (\vec{r} \cdot \vec{H}) (\vec{a} \cdot d\vec{r}) = \frac{I}{c} \oint_S (\text{rot } (\vec{a}(\vec{r} \cdot \vec{H})) \cdot d\vec{S})$$

Враховуючи

$$\text{rot } (\vec{a}(\vec{r} \cdot \vec{H})) = [\nabla(\vec{r} \cdot \vec{H}), \vec{a}] = [\vec{H}, \vec{a}]$$

Таким чином

$$\begin{aligned} (\vec{a} \cdot \vec{N}) &= \frac{I}{c} \oint_S (\text{rot } (\vec{a}(\vec{r} \cdot \vec{H})) \cdot d\vec{S}) = \frac{I}{c} \oint_S ([\vec{H}, \vec{a}] \cdot d\vec{S}) = \frac{I}{c} \oint_S (d\vec{S} \cdot [\vec{H}, \vec{a}]) = \\ &= \frac{I}{c} \oint_S (d\vec{S} \cdot [\vec{H}, \vec{a}]) = \frac{I}{c} \oint_S (d\vec{S}, \vec{H}, \vec{a}) = \frac{I}{c} \oint_S (\vec{a}, d\vec{S}, \vec{H}) = \frac{I}{c} \oint_S (\vec{a} \cdot [d\vec{S}, \vec{H}]) \Rightarrow \\ (\vec{a} \cdot \vec{N}) &= \frac{I}{c} \oint_S (\vec{a} \cdot [d\vec{S}, \vec{H}]) \Rightarrow \end{aligned}$$

$$\left(\vec{a}, \vec{N} - \frac{I}{c} \oint_S [d\vec{S}, \vec{H}] \right) = 0, \forall \vec{a} = \text{const} \Rightarrow$$

$$\vec{N} = \frac{I}{c} \oint_S [d\vec{S}, \vec{H}] = \left[\frac{I}{c} \oint_S d\vec{S}, \vec{H} \right]$$

Але

$$\vec{m} = \frac{I}{c} \int_S d\vec{S}$$

(див задачу 10). Тому

$$\vec{N} = [\vec{m}, \vec{H}]$$

Задача 13 (248)

Зміщена співвісна циліндрична порожнина радіуса a розташована у

прямолінійному нескінченному суцільному провіднику з радіусом b . Вісь порожнини знаходиться на відстані d від осі провідника. ($b > a + d$). Знайти магнітне поле

$\vec{H}$, коли $j = \text{const}$

Шукаємо магнітне поле за допомогою принципу суперпозиції

$$\vec{H} = \vec{H}_1 + \vec{H}_2$$

$$\vec{H} = \frac{2I}{c} \frac{r}{a^2} \vec{e}_a$$

$$\vec{e}_a = \frac{-\vec{i}y + \vec{j}x}{r}$$

$$I_r = j\pi r^2, \quad I_1 = j\pi b^2, \quad I_2 = j\pi a^2$$

$$\frac{I_r}{I} = \frac{r^2}{b^2} \Rightarrow I_r = I \frac{r^2}{b^2}$$

$$\vec{H}_1(\vec{r}_1) = \frac{2I_1}{c} \frac{r_1}{b^2} \vec{e}_a = \frac{2j\pi b^2}{c} \frac{r_1}{b^2} \vec{e}_a = \frac{2\pi j}{c} r_1 \vec{e}_a = \frac{2\pi j}{c} (-\vec{i}y_1 + \vec{j}x_1)$$

$$\vec{H}_2(\vec{r}_2) = -\frac{2I_2}{c} \frac{r_2}{a^2} \vec{e}_a = -\frac{2j\pi a^2}{c} \frac{r_2}{a^2} \vec{e}_a = -\frac{2\pi j}{c} r_2 \vec{e}_a = -\frac{2\pi j}{c} (-\vec{i}y_2 + \vec{j}x_2)$$

$$\vec{H} = \vec{H}_1 + \vec{H}_2 = \frac{2\pi j}{c} (-\vec{i}y_1 + \vec{j}x_1) - \frac{2\pi j}{c} (-\vec{i}y_2 + \vec{j}x_2) = \frac{2\pi j}{c} [-\vec{i}y_1 + \vec{j}x_1 + \vec{i}y_2 - \vec{j}x_2]$$

$$\vec{H} = \frac{2\pi j}{c} [(y_2 - y_1)\vec{i} - (x_2 - x_1)\vec{j}] = \frac{2\pi j}{c} [\vec{k}, (x_2 - x_1)\vec{i} + (y_2 - y_1)\vec{j}] = -\frac{2\pi j}{c} [\vec{k}, \vec{d}]$$

$$\vec{d} = (x_2 - x_1)\vec{i} + (y_2 - y_1)\vec{j}$$

$$\vec{H} = \frac{2\pi j}{c} [\vec{d}, \vec{k}]$$

Задача 14 (252a)

Знайти магнітне поле на осі тонкого замкнутого провідника (кільця) з током I . Радіус кільця R .

Закон Біо-Савара-Лапласа для замкнутого провідника з током

$$\vec{H}(\vec{r}) = \frac{1}{c} \oint_L \frac{[d\vec{I}, \vec{r} - \vec{r}']}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} = \frac{I}{c} \oint_L \frac{[d\vec{r}', \vec{r} - \vec{r}']}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} = \frac{I}{c} \oint_L \frac{[d\vec{r}', \vec{R}]}{R^3}$$

$$L : \vec{r}' = x'\vec{i} + y'\vec{j} = r(\vec{i}\cos\alpha + \vec{j}\sin\alpha) = r\vec{e}_r \rightarrow \vec{r}' = a\vec{e}_r$$

$$d\vec{r}' = a(-\vec{i}\sin\alpha + \vec{j}\cos\alpha)d\alpha = a\vec{e}_a d\alpha$$

$$\vec{r} = z\vec{k}$$

$$\vec{R} = \vec{r} - \vec{r}' = z\vec{k} - x'\vec{i} - y'\vec{j} = z\vec{k} - a\vec{e}_r$$

$$R^2 = x'^2 + y'^2 + z^2 = a^2 + z^2$$

$$\vec{H}(0,0,z) = \frac{I}{c} \oint_L \frac{[a\vec{e}_a d\alpha, z\vec{k} - a\vec{e}_r]}{R^3} = \frac{Ia}{c} \oint_L \frac{[\vec{e}_a, z\vec{k} - a\vec{e}_r]}{R^3} d\alpha$$

$\{\vec{e}_r, \vec{e}_a, \vec{k}\}$ – правая тройка

$$\vec{k} = [\vec{e}_r, \vec{e}_a], \quad \vec{e}_r = [\vec{e}_a, \vec{k}], \quad \vec{e}_a = [\vec{k}, \vec{e}_r]$$

$$\vec{H}(0, 0, z) = \frac{Ia}{c} \oint_L \frac{[\vec{e}_a, z\vec{k} - a\vec{e}_r]}{R^3} d\alpha = \frac{Ia}{c} \oint_L \frac{(z\vec{e}_r + a\vec{k})}{R^3} d\alpha = H_r \vec{e}_r + H_z \vec{k}$$

$$H_r \vec{e}_r = \frac{Ia}{c} \oint_L \frac{z\vec{e}_r}{R^3} d\alpha = \frac{Ia}{c} \frac{z}{R^3} \oint_L \vec{e}_r d\alpha = 0$$

$$H_z = \frac{Ia}{c} \oint_L \frac{a}{R^3} d\alpha = \frac{Ia}{c} \frac{a}{R^3} \int_0^{2\pi} d\alpha = \frac{2\pi I}{c} \frac{a^2}{R^3}$$

$$H_z = \frac{2\pi I}{c} \frac{a^2}{(a^2 + z^2)^{3/2}}$$

$$H_r = 0, \quad H_a = 0,$$

Задача 14 (252b)

Знайти магнітне поле на осі соленоїда з щільною намоткою, що має форму циліндра. Висота циліндра h , радіус r , число витків на одиницю довжини n , сила току I_0 .

Використаємо формулу для магнітного поля на вісі кільця з током (див. задачу 13):

$$H_r = 0, \quad H_a = 0, \quad H_z = \frac{2\pi I}{c} \frac{a^2}{(a^2 + z^2)^{3/2}}$$

та принцип суперпозиції. Природно, що формули

$$H_r = 0, \quad H_a = 0$$

виконуються і на осі соленоїда. Густина току соленоїда

$$i = nI_0 = \frac{\Delta I}{\Delta z} \Rightarrow \Delta I = nI_0 \Delta z \Rightarrow$$

де

$$n = \frac{\Delta N}{\Delta z}$$

Тоді диференціал току на поверхні соленоїда

$$dI = nI_0 dz$$

Виділемо тонку кільцеву смугу на соленоїді і перепишемо H_z у диференціальному вигляді

$$dH_z(z) = \frac{2\pi}{c} \frac{a^2}{(a^2 + (z - z')^2)^{3/2}} dI = \frac{2\pi}{c} \frac{a^2 n I_0 dz'}{(a^2 + (z - z')^2)^{3/2}}$$

Звідси

$$H_z(z) = \frac{2\pi a^2 n I_0}{c} \int_{-h/2}^{h/2} \frac{dz'}{(a^2 + (z - z')^2)^{3/2}}$$

Підстановка

$$z - z' = a \tan \beta \Rightarrow dz' = -\frac{ad\beta}{\cos^2 \beta}$$

$$a^2 + (z - z')^2 = a^2(1 + \tan^2 \beta) = \frac{a^2}{\cos^2 \beta}$$

$$\tan \beta = \frac{z - z'}{a}$$

$$\sin \beta = \frac{\tan \beta}{\sqrt{1 + \tan^2 \beta}} = \frac{z - z'}{\sqrt{a^2 + (z - z')^2}}$$

Тому

$$H_z(z) = -\frac{2\pi a^2 n I_0}{c} \int_{-h/2}^{h/2} \frac{\frac{ad\beta}{\cos^2 \beta}}{\left(\frac{a^2}{\cos^2 \beta}\right)^{3/2}} = -\frac{2\pi n I_0}{c} \int_{\beta_1}^{\beta_2} \cos \beta d\beta = -\frac{2\pi n I_0}{c} \sin \beta \Big|_{\beta_1}^{\beta_2}$$

$$H_z(z) = \frac{2\pi n I_0}{c} (\sin \beta_1 - \sin \beta_2)$$

$$\sin \beta_1 = \frac{z + h/2}{\sqrt{a^2 + (z + h/2)^2}}, \quad \sin \beta_2 = \frac{z - h/2}{\sqrt{a^2 + (z - h/2)^2}}$$

Таким чином магнітне поле на осі соленоїда буде

$$H_z(z) = \frac{2\pi n I_0}{c} \left(\frac{z + h/2}{\sqrt{a^2 + (z + h/2)^2}} - \frac{z - h/2}{\sqrt{a^2 + (z - h/2)^2}} \right)$$

Задача 15 (257)

Знайти енергію взаємодії $\mathcal{E}_{int}^m$ двох малих замкнених витків з током і з магнітними моментами $\vec{m}_1$ і $\vec{m}_2$.

Енергія взаємодії $\mathcal{E}_{int}^m$ деякої області з густиною тока $\vec{j}$ із зовнішнім магнітним полем визначається інтегралом

$$\mathcal{E}_{int}^m = \frac{1}{c} \int_D (\vec{j} \cdot \vec{A}) dv$$

де $\vec{A}$ – векторний потенціал зовнішнього магнітного поля. У нашому випадку зовнішнє поле визначається векторним потенціалом $\vec{A}_2$ магнітного диполя $\vec{m}_2$ другого витка з током: $\mu_0 = \frac{1}{\epsilon_0 c^2} \rightarrow \frac{4\pi}{c^2}, \vec{B} \rightarrow \frac{1}{c} \vec{H} \Rightarrow \vec{A}_B \rightarrow \frac{1}{c} \vec{A}_H$

$$\vec{A}_2 = \frac{[\vec{m}_2 \cdot \vec{r}]}{r^3}$$

яке діє на малий замкнений виток з током I_1 та магнітним моментом $\vec{m}_1$. Виконуючи заміну

$$\vec{j} dv \rightarrow I d\vec{r}$$

одержуємо енергію взаємодії $\mathcal{E}_{int}^m$ витка з током I_1 із зовнішнім магнітним полем з векторним потенціалом $\vec{A}_2$

$$\mathcal{E}_{int}^m = \frac{I_1}{c} \oint_L (\vec{A}_2 \cdot d\vec{r})$$

За теоремою Стокса маємо

$$\mathcal{E}_{int}^m = \frac{I_1}{c} \oint_L (\vec{A}_2 \cdot d\vec{r}) = \frac{I_1}{c} \oint_L (\text{rot } \vec{A}_2 \cdot d\vec{S}) = \frac{I_1}{c} \oint_L (\vec{H}_2 \cdot d\vec{S})$$

Ми вважаємо, що магнітне поле $\vec{H}_2$ повільно міняється в околі кола радіуса r , тобто $\vec{H}_2 = \text{const}$. Так що

$$\mathcal{E}_{int}^m = \frac{I_1}{c} \oint_L (\vec{H}_2 \cdot d\vec{S}) = \left(\vec{H}_2, \frac{I_1}{c} \oint_L d\vec{S} \right) = \vec{m}_1 \cdot \vec{H}_2$$

де

$$\vec{m} = \frac{I}{c} \int_S d\vec{S}$$

магнітний момент першого кола (див задачу 10). Магнітне поле другого кола дорівнює

$$\vec{H}_2 = \text{rot } \vec{A}_2 = \text{rot } \frac{[\vec{m}_2 \cdot \vec{r}]}{r^3} = \frac{3\vec{r}(\vec{r} \cdot \vec{m}_2) - r^2 \vec{m}_2}{r^5} = \frac{3\vec{n}(\vec{n} \cdot \vec{m}_2) - \vec{m}_2}{r^3}$$

Нарешті, ми можемо знайти енергію взаємодії

$$U = -\mathcal{E}_{int}^m = -\vec{m}_1 \cdot \vec{H}_2 = -\frac{3(\vec{n} \cdot \vec{m}_1)(\vec{n} \cdot \vec{m}_2) - (\vec{m}_1 \cdot \vec{m}_2)}{r^3}$$

Деякі задачі з книги Топтигіна "Современ электродинамика"

Задача 16. (2.67). За якої умови електричний струм з об'ємною густиною

$$\vec{j}(r) = \vec{j}_0 \cos(\vec{k} \cdot \vec{r}),$$

де $\vec{j}_0, \vec{r}$ – постійні вектори, може забезпечити стаціонарний розподіл зарядів у просторі?

Маємо

$$\text{div} \vec{j}(r) = (\vec{j}_0 \cdot \nabla) \cos(\vec{k} \cdot \vec{r}) = -\sin(\vec{k} \cdot \vec{r}) (\vec{j}_0 \cdot \nabla) (\vec{k} \cdot \vec{r}) = -\sin(\vec{k} \cdot \vec{r}) (\vec{j}_0 \cdot \vec{k}) = 0 \Rightarrow$$

$$(\vec{j}_0 \cdot \vec{k}) = 0$$

Тобто

$$\vec{j}_0 \perp \vec{k}$$

Інакше

$$\text{div} \vec{j}(r) \neq 0 \Rightarrow$$

У нестационарному випадку маємо

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div} \vec{j}(r) = 0$$

Задача 17. (2.69). Показати, що однорідному і постійному магнітному полю $\vec{H}$ можна зіставити векторний потенціал.

Чи задовольняє він умові $\text{div} \vec{A} = 0$?

$$\vec{A} = \frac{1}{2} [\vec{H}, \vec{r}]$$

Дійсно

$$\operatorname{rot} \vec{A} = \frac{1}{2} [\nabla, [\vec{H}, \vec{r}]] = \frac{1}{2} 2\vec{H} = \vec{H}$$

Перевірка умови

$$\operatorname{div} \vec{A} = 0$$

Дійсно

$$\operatorname{div} \vec{A} = \frac{1}{2} \operatorname{div} [\vec{H}, \vec{r}] = \frac{1}{2} \vec{r} \cdot \operatorname{rot} \vec{H} - \vec{H} \cdot \operatorname{rot} \vec{r} = 0$$

Задача 18. (2.88) Нехай система заряджених частинок з однаковим відношенням заряду до маси e/m здійснює фінітний (обмежене в просторі) рух у деякому зовнішньому полі.

Знайти зв'язок магнітного моменту з моментом імпульсу системи частинок, що рухаються в деякій обмеженій області.

Маємо

$$\vec{m} = \frac{1}{2c} \sum_a q_a [\vec{r}_a, \vec{V}_a]$$

$$\vec{L} = \sum_a \vec{L}_a = \sum_a [\vec{r}_a, \vec{p}_a] = \sum_a m_a [\vec{r}_a, \vec{V}_a]$$

Звідси

$$\vec{L}_a = m_a [\vec{r}_a, \vec{V}_a] \Rightarrow$$

$$[\vec{r}_a, \vec{V}_a] = \frac{\vec{L}_a}{m_a}$$

Тоді

$$\vec{m} = \frac{1}{2c} \sum_a q_a [\vec{r}_a, \vec{V}_a] = \frac{1}{2c} \sum_a \frac{q_a}{m_a} \vec{L}_a$$

Нехай

$$\frac{q_a}{m_a} = \frac{e}{m} = \text{const}$$

Тоді

$$\vec{m} = \frac{e}{2cm} \sum_a \vec{L}_a = \frac{e}{2mc} \vec{L}$$

де

$$\vec{L} = \sum_a \vec{L}_a$$

повний момент імпульсу системи

$$\vec{m} = \frac{e}{2mc} \vec{L}$$

Таким чином

$$m = \eta L$$

де

$$\eta = \frac{e}{2mc}$$

– гіромагнітне співвідношення.