

Матеріал до посібника Гладуша В. Д.
"Розв'язування задач з електродинаміки"

Електростатика

Основні рівняння

$$\operatorname{div} \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$$

$$\operatorname{rot} \vec{E} = 0$$

$$\Delta \varphi = -\frac{\rho}{\epsilon_0}$$

$$\vec{E} = -\operatorname{grad} \varphi$$

Граничні умови

$$(\vec{n}, \vec{E}^{(2)} - \vec{E}^{(1)})_S = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$$

$$[\vec{n}, \vec{E}^{(2)} - \vec{E}^{(1)}]_S = 0$$

$$[\varphi^{(2)} - \varphi^{(1)}]_S = 0$$

$$\left[\frac{\partial \varphi^{(2)}}{\partial n} - \frac{\partial \varphi^{(1)}}{\partial n} \right]_S = -\frac{\sigma}{\epsilon_0}$$

Знаходження потенціалу

$$\varphi(\vec{r}) = - \int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}} (\vec{E}, d\vec{r})$$

$$\varphi(\vec{r}_0) = 0$$

Теорема Гаусса

$$\oint_S (\vec{E}, \vec{S}) = \frac{Q}{\epsilon_0}$$

$$Q = \int_D \rho dv, \quad Q = \int_{\vec{s}} \sigma dS, \quad Q = \int_{\gamma} \chi dl$$

Де Q – заряд усередині поверхні S , який записан для об'ємного ρ , поверхневого σ і лінійного χ розподілів заряду.

Для острівних систем

$$\varphi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_D \frac{\rho(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dv'$$

$$\varphi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_S \frac{\sigma(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} ds'$$

$$\varphi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{\gamma} \frac{\chi(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dl'$$

Для ∞ систем краще працювати з напруженостями

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_D \frac{\rho(\vec{r}')(\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} dv'$$

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_S \frac{\sigma(\vec{r}')(\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} ds'$$

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_\gamma \frac{\chi(\vec{r}')(\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} dl'$$

1) Умови на ∞ . для островних систем

$$\varphi|_{\infty} = 0, \quad \vec{E}|_{\infty} = 0$$

2) Умови при відсутності зовнішніх джерел

$$\varphi = 0, \quad \text{при } \rho = 0$$

$$\vec{E} = 0, \quad \text{при } \rho = 0$$

Енергія

$$W = \frac{\epsilon_0}{2} \int_{\mathbb{R}^3} E^2 dv$$

Енергія для островних систем

$$W = \frac{1}{2} \int_D \rho \varphi dv, \quad W = \frac{1}{2} \int_S \sigma \varphi dS, \quad W = \frac{1}{2} \int_\gamma \chi \varphi dl$$

В останній формулі енергії виписані для об'ємного ρ , поверхневого σ і лінійного χ розподілів заряду.

Перехід від системи СІ до гаусової системи

$$\epsilon_0 \rightarrow \frac{1}{4\pi}, \quad \mu_0 = \frac{1}{\epsilon_0 c^2} \rightarrow \frac{4\pi}{c^2}$$

$$\vec{B} \rightarrow \frac{1}{c} \vec{H}$$

Підручники для практичних занять.

В.В. Батыгин, И.Н. Топтыгин. Сборник задач по электродинамике. 1962

В.В. Батыгин, И.Н. Топтыгин. Сборник задач по электродинамике. 2002

Задача 1 (№69).

Нескінченна плоска плита з товщиною a рівномірно заряджена по об'єму з густиною ρ . Знайти потенціал φ і напруженість $\vec{E}$ електричного поля.

$$\Delta\varphi = \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2} = -\frac{\rho(z)}{\epsilon_0} = -\frac{1}{\epsilon_0} \begin{cases} 0, & z > a/2 \\ \rho_0, & |z| \leq a/2 \\ 0, & z < -a/2 \end{cases}$$

$$x \rightarrow x' = x + x_0$$

$$y \rightarrow y' = y + y_0$$

$$\varphi = \varphi(\vec{r}) = \varphi(x, y, z) \rightarrow \varphi = \varphi(z)$$

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = -\frac{1}{\varepsilon_0} \begin{cases} 0, & z > a/2 \\ \rho_0, & |z| \leq a/2 \\ 0, & z < -a/2 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} 1) \quad \frac{\partial^2 \varphi^{(1)}}{\partial z^2} = 0 &\Rightarrow \varphi^{(1)} = A_1 z + B_1, & z < -a/2 \\ 2) \quad \frac{\partial^2 \varphi^{(2)}}{\partial z^2} = -\frac{\rho_0}{\varepsilon_0} &\Rightarrow \varphi^{(2)} = -\frac{\rho_0}{\varepsilon_0} \frac{z^2}{2} + A_2 z + B_2, & |z| \leq a/2 \\ 1) \quad \frac{\partial^2 \varphi^{(3)}}{\partial z^2} = 0 &\Rightarrow \varphi^{(3)} = A_3 z + B_3, & z > a/2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \varphi &= 0, \quad \text{при } \rho = 0 \Rightarrow \\ A_2 &= 0, \quad B_2 = 0 \Rightarrow \\ \varphi_2 &= -\frac{\rho_0}{\varepsilon_0} \frac{z^2}{2}, \quad |z| \leq a/2 \end{aligned}$$

Остаточно

$$\begin{aligned} 1) \quad \varphi^{(1)} &= A_1 z + B_1, & z < -a/2 \\ 2) \quad \varphi^{(2)} &= -\frac{\rho_0}{\varepsilon_0} \frac{z^2}{2}, & |z| \leq a/2 \\ 1) \quad \varphi^{(3)} &= A_3 z + B_3, & z > a/2 \end{aligned}$$

Умови зшивання нормальних похідних на границях поділу

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi}{\partial n} &= \frac{d\varphi}{dz} \\ \left[\frac{d\varphi^{(2)}}{dz} - \frac{d\varphi^{(1)}}{dz} \right]_{z=-a/2} &= 0 \Rightarrow A_1 = \frac{\rho_0}{\varepsilon_0} \frac{a}{2} \\ \left[\frac{d\varphi^{(3)}}{dz} - \frac{d\varphi^{(2)}}{dz} \right]_{z=a/2} &= 0 \Rightarrow A_3 = -\frac{\rho_0}{\varepsilon_0} \frac{a}{2} \end{aligned}$$

Тоді

$$\begin{aligned} 1) \quad \varphi^{(1)} &= \frac{\rho_0 a}{2\varepsilon_0} z + B_1, & z < -a/2 \\ 2) \quad \varphi^{(2)} &= -\frac{\rho_0}{2\varepsilon_0} z^2, & |z| \leq a/2 \\ 1) \quad \varphi^{(3)} &= -\frac{\rho_0 a}{2\varepsilon_0} z + B_3, & z > a/2 \end{aligned}$$

Решта постійних знаходимо з умови безперервності потенціалів на межах поділу

$$\begin{aligned} [\varphi^{(1)} - \varphi^{(2)}]_{z=-a/2} &= 0 \Rightarrow \frac{\rho_0 a}{2\varepsilon_0} \left(-\frac{a}{2}\right) + B_1 = -\frac{\rho_0}{2\varepsilon_0} \left(-\frac{a}{2}\right)^2 \Rightarrow B_1 = \frac{\rho_0 a^2}{8\varepsilon_0} \\ [\varphi^{(2)} - \varphi^{(3)}]_{z=a/2} &= 0 \Rightarrow -\frac{\rho_0}{2\varepsilon_0} \left(\frac{a}{2}\right)^2 = -\frac{\rho_0 a}{2\varepsilon_0} \frac{a}{2} + B_3 \Rightarrow B_3 = \frac{\rho_0 a^2}{8\varepsilon_0} \end{aligned}$$

Відповідь 1

$$\begin{aligned}
1) \quad \varphi^{(1)} &= \frac{\rho_0 a}{2\epsilon_0} z + \frac{\rho_0 a^2}{8\epsilon_0} = \frac{\rho_0 a}{8\epsilon_0} (1 + 4z), & z < -a/2 \\
2) \quad \varphi^{(2)} &= -\frac{\rho_0}{2\epsilon_0} z^2, & |z| \leq a/2 \\
1) \quad \varphi^{(3)} &= -\frac{\rho_0 a}{2\epsilon_0} z + \frac{\rho_0 a^2}{8\epsilon_0} = \frac{\rho_0 a}{8\epsilon_0} (1 - 4z), & z > a/2
\end{aligned}$$

або

$$\varphi = \frac{\rho_0}{2\epsilon_0} \begin{cases} \frac{a}{4}(1 - 4|z|), & |z| > a/2 \\ -z^2, & |z| \leq a/2 \end{cases}$$

Знайдемо напруженість електричного поля

$$\vec{E} = -\text{grad } \varphi(z) = -\vec{k} \frac{d\varphi}{dz}$$

$$\vec{E} = E\vec{k}, \quad E = -\frac{d\varphi}{dz}$$

$$E^{(1)} = -\frac{d\varphi^{(1)}}{dz} = -\frac{\rho_0 a}{2\epsilon_0}, \quad z < -a/2$$

$$E^{(2)} = -\frac{d\varphi^{(2)}}{dz} = \frac{\rho_0}{\epsilon_0} z, \quad |z| \leq a/2$$

$$E^{(3)} = -\frac{d\varphi^{(3)}}{dz} = \frac{\rho_0 a}{2\epsilon_0}, \quad z > a/2$$

Відповідь 2

$$\vec{E} = \frac{\rho_0}{\epsilon_0} \vec{k} \begin{cases} -\frac{a}{2}, & z < -a/2 \\ z, & |z| \leq a/2 \\ \frac{a}{2}, & z > a/2 \end{cases}$$

Задача 2 (№70).

У просторі маємо заряд з розподілом по періодичному закону $\rho = \rho_0 \cos \alpha x \cos \beta y \cos \gamma z$, де $\rho_0 = \text{const}$. Знайти потенціал φ електричного поля.

Треба вирішити рівняння Пуассона

$$\Delta \varphi = -\frac{\rho}{\epsilon_0}$$

У нашому випадку маємо

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = -\frac{\rho_0}{\epsilon_0} \cos \alpha x \cos \beta y \cos \gamma z$$

Заряд в просторі розподілений по періодичному закону, природно шукати потенціал теж у вигляді періодичної функції

$$\varphi(x, y, z) = \varphi_0 \cos \alpha x \cos \beta y \cos \gamma z$$

Підставляючи в рівняння Пуассона знаходимо

$$-\varphi_0(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2) \cos \alpha x \cos \beta y \cos \gamma z = -\frac{\rho_0}{\epsilon_0} \cos \alpha x \cos \beta y \cos \gamma z$$

$$\varphi_0(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2) = \frac{\rho_0}{\epsilon_0} \Rightarrow \varphi_0 =$$

В результаті отримуємо

$$\varphi(x,y,z) = \frac{\rho_0 \cos \alpha x \cos \beta y \cos \gamma z}{\epsilon_0(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2)}$$

Задача 3 (№71).

Площина $z = 0$ заряджена з густиною, яка змінюється по періодичному закону $\sigma = \sigma_0 \sin \alpha x \sin \beta y$, де $\sigma_0 = \text{const}$, $\alpha = \text{const}$ і $\beta = \text{const}$. Знайти потенціал електричного поля цієї системи зарядів.

Оскільки об'ємний заряд в просторі відсутня, необхідно вирішити рівняння Лапласа

$$\Delta \varphi = 0.$$

У просторі є межа розділу - площину $z = 0$, яка заряджена по періодичному закону

$$\sigma = \sigma_0 \sin \alpha x \sin \beta y.$$

Нехай φ_2 - потенціал в області $z > 0$, а φ_1 - потенціал в області $z < 0$. Ці величини підкоряються відповідним умовам для потенціалу на заряджених поверхнях

$$\frac{\partial \varphi_2}{\partial n} = \frac{\partial \varphi_1}{\partial n} = -\frac{\sigma_0}{\epsilon_0}, \quad \varphi_2 = \varphi_1, \quad \text{при } z = 0$$

Таким чином, ми повинні вирішити рівняння Лапласа для потенціалів в обох областях

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = 0 \quad \#$$

які на межі поділу підпорядковуються наступним умовам:

– умові неперервності потенціалів

$$\varphi_2 = \varphi_1, \quad \text{при } z = 0 \quad \#$$

– умові на скачки нормальної похідної потенціалів :

$$\frac{\partial \varphi_2}{\partial z} = \frac{\partial \varphi_1}{\partial z} = -\frac{\sigma_0}{\epsilon_0}, \quad \text{при } z = 0 \quad \#$$

Тут враховано, що

$$\frac{\partial}{\partial n} = \vec{n} \cdot \nabla = \vec{k} \cdot \nabla = \frac{\partial}{\partial z}$$

Вирішуємо рівняння Лапласа методом поділу перемінних. Розглянемо

$$\varphi(x,y,z) = \phi(x,y)f(z)$$

$$f\left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2}\right) + \phi \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = 0 \Rightarrow$$

$$\frac{1}{\phi} \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} \right) = -\frac{1}{f} \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = -\lambda^2 \Rightarrow$$

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + \lambda^2 \phi = 0 \quad \#$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial z^2} - \lambda^2 f = 0 \quad \#$$

Враховуючи, періодичність поверхневої густини заряду по змінним x, y , шукаємо рішення рівняння (4) теж в періодичному вигляді

$$\phi(x, y) = \phi_0 \sin \alpha x \sin \beta y$$

Тоді з рівняння (4) отримуємо

$$\lambda^2 = \alpha^2 + \beta^2$$

Рівняння (5) має наступне загальний розв'язок

$$f = ae^{\gamma z} + be^{-\gamma z}$$

Тоді загальний розв'язок рівняння Лапласа (1) має вигляд

$$\phi(x, y, z) = \phi(x, y)f(z) = (Ae^{\gamma z} + Be^{-\gamma z}) \sin \alpha x \sin \beta y$$

Далі скористаємося умовою регулярності на $\pm\infty$, тобто

$$\phi_2 < \infty \text{ при } z \rightarrow \infty \Rightarrow A = 0$$

$$\phi_2 = Be^{-\gamma z} \sin \alpha x \sin \beta y$$

і

$$\phi_1 < \infty \text{ при } z \rightarrow -\infty \Rightarrow B = 0$$

$$\phi_1 = Ae^{\gamma z} \sin \alpha x \sin \beta y$$

Умова безперервності потенціалів (2) дає

$$\phi_2 = \phi_1 \text{ при } z = 0 \Rightarrow A \sin \alpha x \sin \beta y = B \sin \alpha x \sin \beta y \Rightarrow A = B$$

Умова на стрибок нормальної похідної потенціалу (3) дає

$$\frac{\partial \phi_2}{\partial z} = \frac{\partial \phi_1}{\partial z} = -\frac{\sigma_0}{\epsilon_0} \sin \alpha x \sin \beta y, \text{ при } z = 0 \Rightarrow$$

#

$$-\gamma A \sin \alpha x \sin \beta y - \gamma A \sin \alpha x \sin \beta y = -\frac{\sigma_0}{\epsilon_0} \sin \alpha x \sin \beta y \Rightarrow$$

$$A = \frac{\sigma_0}{2\epsilon_0\gamma}$$

Отже розв'язок поставленого завдання має вигляд

$$\phi = \frac{\sigma_0}{2\epsilon_0\gamma} \sin \alpha x \sin \beta y \begin{cases} e^{-\gamma z}, & z > 0 \\ e^{\gamma z}, & z < 0 \end{cases}.$$

Задача 4а. (№72)

Нескінченно довгий круговий циліндр з радіусом R рівномірно заряджений по об'єму так, що на одиницю його довжини приходить заряд χ . Знайти потенціал ϕ і напруженість $\vec{E}$ електричного поля.

За допомогою теореми Гауса маємо

$$\oint_S (\vec{E}, d\vec{S}) = \frac{Q}{\epsilon_0}$$

Розташуємо циліндр уздовж осі OZ . Маємо дві області:

1) : $r < R$ – внутрішня область

2) : $r > R$ – зовнішня область

і границю розділу

$$r = R$$

Спочатку знайдемо поле у внутрішній області $r < R$. Виберемо допоміжну циліндричну поверхню S радіуса $r < R$ і висоти h :

$$S : \left\{ -\frac{h}{2} \leq z \leq \frac{h}{2} \right\} \otimes \{x = r \cos \alpha, y = r \sin \alpha, 0 \leq \alpha < 2\pi, r = \text{const}\}$$

Оскільки система має циліндричну симетрію і однорідна вздовж осі OZ , то природно шукати потенціал φ і напруженість $\vec{E}$ у вигляді

$$\begin{aligned}\varphi &= \varphi(r) \\ \vec{E} &= E(r)\vec{e}_r\end{aligned}$$

і перейдемо до циліндричної системи координат

$$\begin{aligned}\vec{r} &= r(\vec{i} \cos \alpha + \vec{j} \sin \alpha) + z\vec{k} \\ x &= r \cos \alpha, \quad y = r \sin \alpha, \quad z = z \\ r &= \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \tan \alpha = \frac{y}{x}\end{aligned}$$

Введемо ортонормований базис циліндричної системи координат

$$\begin{aligned}\vec{e}_r &= \vec{i} \cos \alpha + \vec{j} \sin \alpha = \frac{x\vec{i} + y\vec{j}}{r} = \frac{\vec{r}}{r}, \\ \vec{e}_\alpha &= -\vec{i} \sin \alpha + \vec{j} \cos \alpha = \frac{-y\vec{i} + x\vec{j}}{r}\end{aligned}$$

Застосуємо теорему Гаусса до цієї допоміжної циліндричної поверхні. Маємо

$$\oint_S (\vec{E}, d\vec{S}) = \oint_{S_+} (\vec{E}, d\vec{S}) + \oint_{S_-} (\vec{E}, d\vec{S}) + \oint_{S_b} (\vec{E}, d\vec{S}) = \frac{Q}{\epsilon_0}$$

де S_+ , S_- і S_b – верхня, нижня і бічна поверхні циліндра. Далі

$$\oint_{S_+} (\vec{E}, d\vec{S}) = \int_{S_+} (E(r)\vec{e}_r, dS\vec{k}) = \int_{S_+} E(r)(\vec{e}_r, \vec{k}) dS = 0$$

оскільки $(\vec{e}_r, \vec{k}) = 0$. Аналогічно

$$\oint_{S_-} (\vec{E}, d\vec{S}) = 0$$

Для бічної поверхні знаходимо

$$\oint_{S_b} (\vec{E}, d\vec{S}) = \int_{S_b} (E(r)\vec{e}_r, dS\vec{e}_r) = E(r) \int_{S_b} (\vec{e}_r, \vec{e}_r) dS = E(r) \int_{S_b} dS = E(R)S_{\text{бок}} = E(r)2\pi rh$$

Заряд всередині циліндра радіуса $r < R$:

$$Q(r) = \int_D \rho dv = \rho \int_D dv = \rho V = \rho \pi r^2 h$$

Заряд циліндра такої же висоти, но радіуса R дорівнює

$$Q = Q(R) = \rho \pi R^2 h$$

За умовою

$$\chi = \frac{\Delta Q}{\Delta z} = \text{const}$$

$$\Delta Q = \rho \pi R^2 \Delta z \Rightarrow$$

Звідси

$$\chi = \frac{\Delta Q}{\Delta z} = \frac{\rho \pi R^2 \Delta z}{\Delta z} = \rho \pi R^2 \Rightarrow$$
$$\rho = \frac{\chi}{\pi R^2}$$

Таким чином, заряд всередині циліндра радіуса r

$$Q(r) = \rho \pi r^2 h = \chi h \frac{r^2}{R^2}$$

Тепер теорема Гаусса про поле $E^{(1)}(r)$ говорить

$$E^{(1)}(r) 2\pi r h = \frac{\chi}{\varepsilon_0} \frac{r^2}{R^2} h, \quad r < R$$

Звідси

$$E^{(1)}(r) = \frac{\chi}{2\pi\varepsilon_0} \frac{r}{R^2}, \quad r < R$$
$$\vec{E}^{(1)} = E^{(1)}(r) \vec{e}_r = \frac{\chi}{2\pi\varepsilon_0} \frac{r}{R^2} \vec{e}_r = \frac{\chi}{2\pi\varepsilon_0} \frac{\vec{r}}{R^2}$$

Тепер знайдемо поле у зовнішній області $r > R$. Виберемо допоміжну циліндричну поверхню S радіуса $r > R$ і висоти h .

Заряд в циліндрі радіуса $r > R$ дорівнює заряду циліндра радіуса R , так що

$$Q(r) = Q(R) = \rho \pi R^2 h = \chi h,$$

$$\chi = \rho \pi R^2$$

Ліва частина теорема Гаусса не зміниться, тому

$$E^{(2)}(r) 2\pi r h = \frac{\chi}{\varepsilon_0} h, \quad r > R$$

Звідси

$$E^{(2)}(r) = \frac{\chi}{2\pi\varepsilon_0 r}, \quad r > R$$

Таким чином

$$E = \begin{cases} E^{(1)} \\ E^{(2)} \end{cases} = \begin{cases} \frac{\chi}{2\pi\varepsilon_0} \frac{r}{R^2} = \frac{\rho}{2\varepsilon_0} r, & r < R \\ \frac{\chi}{2\pi\varepsilon_0 r}, & r \geq R \end{cases} \Rightarrow$$
$$\vec{E} = E(r) \vec{e}_r = \begin{cases} \frac{\chi}{2\pi\varepsilon_0} \frac{\vec{r}}{R^2} = \frac{\rho}{2\varepsilon_0} \vec{r}, & r < R \\ \frac{\chi}{2\pi\varepsilon_0} \frac{\vec{r}}{r^2}, & r \geq R \end{cases}$$

Для знаходження потенціалу у кожній з областей на площині $z = const$ застосуємо формулу

$$\varphi(r) = - \int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}} (\vec{E}, d\vec{r}) = - \int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}} (E(r) \vec{e}_r, d\vec{r})$$

де

$$\vec{r} = r(\vec{i} \cos \alpha + \vec{j} \sin \alpha).$$

Оскільки потенціал не залежить від шляху інтегрування, виберемо на площині $z = const$ шлях $\alpha = const$. Тоді

$$d\vec{r} = dr(\vec{i} \cos \alpha + \vec{j} \sin \alpha) = dr\vec{e}_r$$

і формула для потенціалу набирає вигляду

$$\varphi(r) = - \int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}} (E(r)\vec{e}_r, d\vec{r}\vec{e}_r) = - \int_{r_0}^r E(r)dr$$

Для внутрішній області знаходимо

$$\varphi^{(1)}(r) = - \int_{r_0}^r E^{(1)}(r)dr = - \int_{r_0}^r \frac{\chi}{2\pi\epsilon_0} \frac{r}{R^2} dr = - \frac{\chi}{4\pi\epsilon_0} \frac{r^2}{R^2} + C_1, \quad r \leq R$$

$$C_1 = \frac{\chi}{4\pi\epsilon_0} \frac{r_0^2}{R^2}, \quad r_0 \leq R$$

де r_0 – деяка довільна точка.

Для зовнішній області маємо

$$\varphi^{(2)}(r) = - \int_{r_0}^r E^{(2)}(r)dr = - \int_{r_0}^r \frac{\chi}{2\pi\epsilon_0 r} dr = - \frac{\chi}{2\pi\epsilon_0} \ln(r) + C_2, \quad r \geq R$$

$$C_2 = \frac{\chi}{2\pi\epsilon_0} \ln(\tilde{r}_0), \quad \tilde{r}_0 > R$$

Довільні сталі виберемо так, щоб

$$\varphi^{(1)}(R) = \varphi^{(2)}(R) = 0$$

Звідси випливає

$$\varphi^{(1)}(R) = - \frac{\chi}{4\pi\epsilon_0} + C_1 = 0 \Rightarrow C_1 = \frac{\chi}{4\pi\epsilon_0}$$

$$\varphi^{(2)}(R) = - \frac{\chi}{2\pi\epsilon_0} \ln(R) + C_2 = 0 \Rightarrow C_2 = \frac{\chi}{2\pi\epsilon_0} \ln(R)$$

Підставляя знайдені сталі C_1 і C_2 у формули для потенціалів одержуємо

$$\varphi(r) = \begin{cases} \varphi^{(1)}(r) & r \leq R \\ \varphi^{(2)}(r) & r \geq R \end{cases} = \begin{cases} \frac{\chi}{4\pi\epsilon_0} \left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right), & r \leq R \\ - \frac{\chi}{2\pi\epsilon_0} \ln\left(\frac{r}{R}\right), & r \geq R \end{cases}$$

Задача 4b.(№72)

4а) Нескінченно довгий круговий циліндр з радіусом R рівномірно заряджений по поверхні так, що на одиницю його довжини приходить заряд χ . Знайти потенціал φ і напруженість $\vec{E}$ електричного поля.

Враховуючи симетрію системи, маємо

$$\varphi = \varphi(r), \quad \vec{E} = E(r)\vec{e}_r$$

Знова будуємо допоміжної циліндричної поверхні з радіусами $r < R$ і $r > R$. По аналогії з задачею 4а. маємо

$$\oint_S (\vec{E}, d\vec{S}) = E(r)2\pi rh = \frac{Q}{\epsilon_0}$$

Заряд всередині циліндра радіуса $r < R$

$$Q(r) = \int_D \rho dv = 0$$

Тоді теорема Гаусса говорить

$$E^{(1)}(r)2\pi rh = 0 \Rightarrow E^{(1)} = 0, \quad r < R$$

Заряд в циліндрі радіуса $r > R$ дорівнює заряду циліндра радіуса R , так що

$$Q(r) = Q(R) = \int_S \sigma dS = \sigma \int_S dS = 2\pi\sigma Rh = \chi h,$$

$$\chi = 2\pi\sigma R$$

Тепер теорема Гаусса запишеться так

$$E^{(2)}(r)2\pi rh = \frac{\chi}{\epsilon_0} h, \quad r > R$$

Звідси

$$E(r) = \frac{\chi}{2\pi\epsilon_0 r}, \quad r > R$$

Таким чином

$$E = \begin{cases} E^{(1)} \\ E^{(2)} \end{cases} = \begin{cases} 0, & r < R \\ \frac{\chi}{2\pi\epsilon_0 r}, & r > R \end{cases} \Rightarrow \vec{E} = E(r)\vec{e}_r = \begin{cases} 0, & r < R \\ \frac{\chi}{2\pi\epsilon_0} \frac{\vec{r}}{r^2}, & r > R \end{cases}$$

Потенціал у кожній з областей на площині $z = const$, як у задачі **4а**, знаходимо за формулою

$$\varphi(r) = - \int_{r_0}^r E(r) dr$$

Для внутрішньої області маємо

$$\varphi^{(1)}(r) = 0, \quad r \leq R$$

Для зовнішньої області знаходимо

$$\varphi^{(2)}(r) = -\frac{\chi}{2\pi\epsilon_0} \ln(r) + C_2, \quad r \geq R$$

З умови безперервності одержуємо

$$C_2 = 0$$

Таким чином

$$\varphi(r) = \begin{cases} \varphi^{(1)}(r) \\ \varphi^{(2)}(r) \end{cases} = \begin{cases} 0, & r \leq R \\ -\frac{\chi}{2\pi\epsilon_0} \ln(r), & r \geq R \end{cases}$$

Задача 4с.

Нескінченний циліндр радіусом R заряджений рівномірно по об'єму з густиною ρ . У циліндрі є нескінченна циліндрична порожнина радіусом R_1 , вісь якої паралельна осі циліндра і знаходиться на відстані a від неї, так що $a + R_1 < R$. Знайти напруженість поля $\vec{E}$ в порожнечі.

Розв'язуємо задачу за допомогою принципу суперпозиції. Представимо систему у вигляді двох суміщених циліндрів товстого і тонкого з радіусами R і R_1 , відповідно, які заряджені рівномірно з густиною ρ і $-\rho$. Нехай $\vec{E}_0$ електричне поле товстого

циліндра, а $\vec{E}_1$ електричне поле тонкого циліндра. Тоді електричне поле $\vec{E}$ суміщених куль, відповідно з принципом суперпозиції, буде

$$\vec{E} = \vec{E}_0 + \vec{E}_1$$

Поле усередині товстого циліндра дорівнює (див. задачу 4а)

$$\vec{E}_0 = \frac{\chi_0}{2\pi\epsilon_0} \frac{\vec{r}}{R^2}$$

де

$$\chi_0 = \rho\pi R^2$$

– заряд на одиницю довжини товстого циліндра, а ρ – густина заряду усередині циліндра. Звідси електричне поле усередині товстого циліндра буде

$$\vec{E}_0 = \frac{\rho}{2\epsilon_0} \vec{r}_0$$

Аналогічно поле усередині тонкого циліндра буде

$$\vec{E}_1 = -\frac{\rho}{2\epsilon_0} \vec{r}_1$$

де $-\rho$ – густина заряду усередині тонкого циліндра, яка за умовою протилежна густині заряду усередині товстого циліндра.

Таким чином, електричне поле $\vec{E}$ усередині незарядженої циліндричної порожнини, яка утворена суміщенням куль, відповідно з принципом суперпозиції, буде

$$\vec{E} = \vec{E}_0 + \vec{E}_1 = \frac{\rho}{2\epsilon_0} \vec{r}_0 - \frac{\rho}{2\epsilon_0} \vec{r}_1 = \frac{\rho}{2\epsilon_0} (\vec{r}_0 - \vec{r}_1) = \frac{\rho}{2\epsilon_0} \vec{a} = \text{const}$$

де

$$\vec{a} = \vec{r}_0 - \vec{r}_1$$

вектор, який з'єднує вісі цих циліндрів.

Отже електричне поле усередині незарядженої циліндричної порожнини буде постійним

$$\vec{E} = \frac{\rho}{2\epsilon_0} \vec{a} = \text{const}$$

і спрямованим вздовж лінії, що з'єднує вісі цих циліндрів.

Задача 5.(№73)

Знайти потенціал φ і напруженість $\vec{E}$ електричного поля рівномірно зарядженої прямолінійної нескінченної нитки з зарядом χ на одиницю довжини.

I-й спосіб. За допомогою теореми Гауса

$$\oint_S (\vec{E}, d\vec{S}) = \frac{Q}{\epsilon_0}$$

Розташуємо провідник уздовж осі OZ і виберемо допоміжну циліндричну поверхню S радіуса R і висоти h :

$$S : \left\{ -\frac{h}{2} \leq z \leq \frac{h}{2} \right\} \otimes \left\{ x = R \cos \alpha, y = R \sin \alpha, 0 \leq \alpha < 2\pi, R = \text{const} \right\}$$

Оскільки система має циліндричну симетрію і однорідна вздовж осі OZ , то природно шукати потенціал φ і напруженість $\vec{E}$ у вигляді

$$\varphi = \varphi(r), \quad \vec{E} = E(r) \vec{e}_r$$

і перейти до циліндричної системи координат

$$\vec{r} = r(\vec{i} \cos \alpha + \vec{j} \sin \alpha) + z\vec{k}$$

$$x = r \cos \alpha, \quad y = r \sin \alpha, \quad z = z$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \tan \alpha = \frac{y}{x}$$

Введемо ортонормований базис циліндричної системи координат

$$\vec{e}_r = \vec{i} \cos \alpha + \vec{j} \sin \alpha = \frac{x\vec{i} + y\vec{j}}{r} = \frac{\vec{r}}{r},$$

$$\vec{e}_\alpha = -\vec{i} \sin \alpha + \vec{j} \cos \alpha = \frac{-y\vec{i} + x\vec{j}}{r}$$

Застосуємо теорему Гаусса до цієї допоміжної циліндричної поверхні. Маємо

$$\oint_S (\vec{E}, d\vec{S}) = \oint_{S_+} (\vec{E}, d\vec{S}) + \oint_{S_-} (\vec{E}, d\vec{S}) + \oint_{S_b} (\vec{E}, d\vec{S}) = \frac{Q}{\epsilon_0}$$

де S_+ , S_- і S_b – верхня, нижня і бічна поверхні циліндра. Далі

$$\oint_{S_+} (\vec{E}, d\vec{S}) = \int_{S_+} (E(r)\vec{e}_r, dS\vec{k}) = \int_{S_+} E(r)(\vec{e}_r, \vec{k}) dS = 0$$

оскільки $(\vec{e}_r, \vec{k}) = 0$. Аналогічно

$$\oint_{S_-} (\vec{E}, d\vec{S}) = 0$$

Для бічної поверхні знаходимо

$$\oint_{S_b} (\vec{E}, d\vec{S}) = \int_{S_b} (E(r)\vec{e}_r, dS\vec{e}_r) = E(r) \int_{S_b} (\vec{e}_r, \vec{e}_r) dS = E(r) \int_{S_b} dS = E(r)S_b = E(r)2\pi rh$$

Заряд всередині циліндра

$$Q = \chi h$$

Таким чином

$$E(r)2\pi rh = \frac{\chi}{\epsilon_0} h$$

Звідси, для будь-якого r маємо

$$E(r) = \frac{\chi}{2\pi\epsilon_0 r} \Rightarrow$$

$$\vec{E} = E(r)\vec{e}_r = \frac{\chi}{2\pi\epsilon_0 r} \vec{e}_r = \frac{\chi \vec{r}}{2\pi\epsilon_0 r^2}.$$

Знайдемо формулу для потенціала з урахуванням циліндричної симетрії

$$\vec{E} = -\text{grad } \varphi \Rightarrow$$

$$E(r)\vec{e}_r = -\left(\vec{i} \frac{\partial}{\partial x} + \vec{j} \frac{\partial}{\partial y} + \vec{k} \frac{\partial}{\partial z}\right) \varphi(r) = -\left(\vec{i} \frac{\partial r}{\partial x} + \vec{j} \frac{\partial r}{\partial y}\right) \frac{d\varphi(r)}{dr} = -\left(\frac{\vec{i}x}{r} + \frac{\vec{j}y}{r}\right) \frac{d\varphi(r)}{dr} = -\frac{d\varphi(r)}{dr} \vec{e}_r,$$

Звідси

$$E(r) = -\frac{d\varphi(r)}{dr}$$

і формула для потенціалу набирає вигляду

$$\varphi(r) = \varphi(r_0) - \int_{r_0}^r E(r) dr$$

Враховуючи

$$E(r) = \frac{\chi}{2\pi\epsilon_0 r}$$

одержимо

$$\varphi(r) = - \int_{r_0}^r \frac{\chi dr}{2\pi\epsilon_0 r} = - \frac{\chi}{2\pi\epsilon_0} \ln r \Big|_{r_0}^r = \frac{\chi}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{r_0}{r},$$

де r_0 – деяка довільна точка.

II-й спосіб. За допомогою формули

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{\gamma} \frac{\chi(\vec{r}')(\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} dl'$$

де

$$\chi(\vec{r}') = \chi = const,$$

$$\vec{r} = \vec{r} + z\vec{k} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$$

$$\vec{r}' = \vec{k}z', \quad dl' = dz'$$

$$\gamma : -\infty < z' < \infty$$

$$\vec{r} - \vec{r}' = x\vec{i} + y\vec{j} + (z - z')\vec{k} \Rightarrow$$

$$|\vec{r} - \vec{r}'| = \sqrt{x^2 + y^2 + (z - z')^2}$$

Тоді напруженість $\vec{E}$ набуває вигляд

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{\chi}{4\pi\epsilon_0} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x\vec{i} + y\vec{j} + (z - z')\vec{k}}{[x^2 + y^2 + (z - z')^2]^{3/2}} dz'$$

Перейдемо до циліндричної системи координат

$$\vec{R} = \vec{r} + z\vec{k} = r(\vec{i}\cos\alpha + \vec{j}\sin\alpha) + z\vec{k}$$

$$x = r\cos\alpha, \quad y = r\sin\alpha, \quad z = z$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \tan\alpha = \frac{y}{x}$$

Тоді

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{\chi}{4\pi\epsilon_0} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{r(\vec{i}\cos\alpha + \vec{j}\sin\alpha) + (z - z')\vec{k}}{[r^2 + (z - z')^2]^{3/2}} dz' = \frac{\chi}{4\pi\epsilon_0} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{r\vec{e}_r + (z - z')\vec{k}}{[r^2 + (z - z')^2]^{3/2}} dz'$$

$$\vec{e}_r = \vec{i}\cos\alpha + \vec{j}\sin\alpha$$

і напруженість приймає наступний вид

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{\chi}{4\pi\epsilon_0} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{r\vec{e}_r + (z - z')\vec{k}}{[r^2 + (z - z')^2]^{3/2}} dz' = E_r\vec{e}_r + E_z\vec{k}$$

де

$$E_r = \frac{\chi}{4\pi\epsilon_0} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{rdz'}{[r^2 + (z - z')^2]^{3/2}}$$

$$E_z = \frac{\chi}{4\pi\epsilon_0} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(z - z')dz'}{[r^2 + (z - z')^2]^{3/2}}$$

Легко бачити, що осьова компонента звертається в нуль:

$$E_z = \frac{\chi}{4\pi\epsilon_0} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(z - z')dz'}{[r^2 + (z - z')^2]^{3/2}} = -\frac{\chi}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{\sqrt{r^2 + (z - z')^2}} \Bigg|_{-\infty}^{\infty} = 0$$

Для радіальної компоненти

$$E_r = \frac{\chi r}{4\pi\epsilon_0} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dz'}{[r^2 + (z - z')^2]^{3/2}},$$

використовуємо підстановку

$$z - z' = r \tan \alpha \Rightarrow dz' = -r d \tan \alpha = -r \frac{d\alpha}{\cos^2 \alpha}$$

$$\text{граничі : } z' \rightarrow \infty \Rightarrow \alpha \rightarrow -\frac{\pi}{2}, \quad z' \rightarrow -\infty \Rightarrow \alpha \rightarrow \frac{\pi}{2}.$$

Тоді

$$E_r = \frac{\chi r}{4\pi\epsilon_0} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dz'}{[r^2 + (z - z')^2]^{3/2}} = \frac{\chi r}{4\pi\epsilon_0} \int_{\pi/2}^{-\pi/2} \frac{-r d\alpha}{\cos^2 \alpha [r^2 + r^2 \tan^2 \alpha]^{3/2}} = \frac{\chi}{4\pi r \epsilon_0} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{d\alpha}{\cos^2 \alpha [1 + \tan^2 \alpha]^{3/2}}$$

$$1 + \tan^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha}$$

$$E_r = \frac{\chi}{4\pi r \epsilon_0} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{\cos^3 \alpha d\alpha}{\cos^2 \alpha} = \frac{\chi}{4\pi r \epsilon_0} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos \alpha d\alpha = \frac{\chi}{4\pi r \epsilon_0} \sin \alpha \Big|_{-\pi/2}^{\pi/2} = \frac{\chi}{2\pi r \epsilon_0}$$

Звідси

$$E_r = \frac{\chi}{2\pi r \epsilon_0} = \frac{\chi}{2\pi\epsilon_0} \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

$$\vec{E}(\vec{r}) = E_r \vec{e}_r = \frac{\chi}{2\pi\epsilon_0} \frac{\vec{e}_r}{r} = \frac{\chi}{2\pi\epsilon_0} \frac{r}{r^2} = \frac{\chi}{2\pi\epsilon_0} \frac{x\vec{i} + y\vec{j}}{(x^2 + y^2)}$$

Потенціал знаходимо наведеним вище способом:

$$\varphi(r) = - \int_{r_0}^r \frac{\chi dr}{2\pi\epsilon_0 r} = -\frac{\chi}{2\pi\epsilon_0} \ln r \Big|_{r_0}^r = \frac{\chi}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{r_0}{r},$$

де r_0 – деяка довільна точка.

Задача 6 (№74) .

Знайти потенціал φ електричного поля рівномірно зарядженого прямолінійного відрізка довжиною $2a$, який лежить уздовж осі z від $-a$ до $+a$; заряд відрізка q .

Оскільки область розповсюдження заряду скінченна, потенціал можна знайти за допомогою формули

$$\varphi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{\gamma} \frac{\chi(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dl'$$

Для нашої системи

$$\chi(\vec{r}') = \chi = \text{const}, \quad q = 2a\chi,$$

$$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$$

$$\vec{r}' = z'\vec{k}, \quad dl' = dz'$$

$$\gamma : -a < z' < a$$

$$\vec{r} - \vec{r}' = x\vec{i} + y\vec{j} + (z - z')\vec{k} \Rightarrow$$

$$|\vec{r} - \vec{r}'| = \sqrt{x^2 + y^2 + (z - z')^2}$$

Тоді потенціал набирає вигляд

$$\varphi(\vec{r}) = \frac{\chi}{4\pi\epsilon_0} \int_{-a}^a \frac{dz'}{\sqrt{x^2 + y^2 + (z - z')^2}}$$

де

$$h = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \chi = \frac{q}{2a}$$

Тоді потенціал приймає наступний вид

$$\varphi(\vec{r}) = \frac{q}{8\pi\epsilon_0 a} \int_{-a}^a \frac{dz'}{\sqrt{h^2 + (z - z')^2}}$$

Використуємо підстановку

$$z - z' = ht \Rightarrow dz' = -h dt$$

$$t_1 = \frac{z+a}{h}, \quad t_2 = \frac{z-a}{h}$$

Тоді

$$\varphi(\vec{r}) = -\frac{q}{8\pi\epsilon_0 a} \int_{t_1}^{t_2} \frac{dt}{\sqrt{1+t^2}}$$

Заміна

$$u = t + \sqrt{1+t^2} \Rightarrow \sqrt{1+t^2} = \frac{1}{2} \left(u + \frac{1}{u} \right)$$

$$t = \frac{1}{2} \left(u - \frac{1}{u} \right) \Rightarrow dt = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{u^2} \right) du$$

дає

$$\varphi(\vec{r}) = -\frac{q}{8\pi\epsilon_0 a} \int_{u_1}^{u_2} \frac{du}{u} = -\frac{q}{8\pi\epsilon_0 a} \ln u \Big|_{u_1}^{u_2} = \frac{q}{8\pi\epsilon_0 a} \ln \left| \frac{u_1}{u_2} \right| = \frac{q}{8\pi\epsilon_0 a} \ln \left| \frac{t_1 + \sqrt{1+t_1^2}}{t_2 + \sqrt{1+t_2^2}} \right|$$

або

$$\varphi(\vec{r}) = \frac{q}{8\pi\epsilon_0 a} \ln \left| \frac{\frac{z+a}{h} + \sqrt{1 + \left(\frac{z+a}{h}\right)^2}}{\frac{z-a}{h} + \sqrt{1 + \left(\frac{z-a}{h}\right)^2}} \right| = \frac{q}{8\pi\epsilon_0 a} \ln \left| \frac{z+a + \sqrt{h^2 + (z+a)^2}}{z-a + \sqrt{h^2 + (z-a)^2}} \right|$$

Звідки для потенціала знаходимо

$$\varphi(\vec{r}) = \frac{q}{8\pi\epsilon_0 a} \ln \left| \frac{z+a+\sqrt{x^2+y^2+(z+a)^2}}{z-a+\sqrt{x^2+y^2+(z-a)^2}} \right|$$

Задача 7 (№75) .

Побудувати поверхні рівня потенціала однорідно зарядженого відрізка довжиною $2a$ (див **Задача 6 (№74)**)

$$\varphi(\vec{r}) = \frac{q}{8\pi\epsilon_0 a} \ln \left| \frac{z+a+\sqrt{x^2+y^2+(z+a)^2}}{z-a+\sqrt{x^2+y^2+(z-a)^2}} \right| = C$$

Позначимо

$$z_1 = z+a, \quad z_2 = z-a$$

$$r_1 = \sqrt{x^2+y^2+(z+a)^2}$$

$$r_2 = \sqrt{x^2+y^2+(z-a)^2}$$

Звідси випливає

$$\varphi(\vec{r}) = \tilde{C} \Rightarrow \frac{z+a+\sqrt{x^2+y^2+(z+a)^2}}{z-a+\sqrt{x^2+y^2+(z-a)^2}} = \frac{z_1+r_1}{z_2+r_2} = C$$

$$z_1 - z_2 = 2a$$

$$r_1^2 - r_2^2 = (z+a)^2 - (z-a)^2 = z_1^2 - z_2^2$$

$$(r_1 - r_2)(r_1 + r_2) = (z_1 - z_2)(z_1 + z_2) = 2a(z_1 + z_2) \Rightarrow$$

$$r_1 + r_2 = 2a \frac{z_1 + z_2}{r_1 - r_2}$$

$$r_1^2 - r_2^2 = z_1^2 - z_2^2 \Rightarrow r_1^2 - z_1^2 = r_2^2 - z_2^2 \Rightarrow$$

$$(r_1 - z_1)(r_1 + z_1) = (r_2 - z_2)(r_2 + z_2) \Rightarrow$$

$$\frac{r_2 - z_2}{r_1 - z_1} = \frac{r_1 + z_1}{r_2 + z_2} = C \Rightarrow$$

$$r_1 + z_1 = C(r_2 + z_2)$$

$$r_2 - z_2 = C(r_1 - z_1)$$

$$r_1 - Cr_2 = Cz_2 - z_1$$

$$r_2 - Cr_1 = z_2 - Cz_1$$

$$\begin{cases} z_1 - Cz_2 = Cr_2 - r_1 = y_1 \\ -Cz_1 + z_2 = -Cr_1 + r_2 = y_2 \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -C \\ -C & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}$$

$$\Delta = 1 - C^2$$

$$\begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} = \frac{1}{\Delta} \begin{bmatrix} 1 & C \\ C & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \frac{1}{\Delta} \begin{bmatrix} y_1 + Cy_2 \\ Cy_1 + y_2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} = \frac{1}{\Delta} \begin{bmatrix} Cr_2 - r_1 + C(-Cr_1 + r_2) \\ C(Cr_2 - r_1) - Cr_1 + r_2 \end{bmatrix} = \frac{1}{\Delta} \begin{bmatrix} 2Cr_2 - (1 + C^2)r_1 \\ (1 + C^2)r_2 - 2Cr_1 \end{bmatrix}$$

$$z_1 + z_2 = \frac{1}{\Delta} [2Cr_2 - (1 + C^2)r_1 + (1 + C^2)r_2 - 2Cr_1] = \frac{1}{\Delta} [-(1 + 2C + C^2)r_1 + (1 + 2C + C^2)r_2]$$

$$z_1 + z_2 = \frac{1}{\Delta} [(1 + C)^2 r_2 - (1 + C)^2 r_1] = \frac{(1 + C)^2}{1 - C^2} (r_2 - r_1)$$

$$z_1 + z_2 = \frac{1 + C}{1 - C} (r_2 - r_1)$$

раніш

$$r_1 + r_2 = 2a \frac{z_1 + z_2}{r_1 - r_2} = \frac{2a}{r_1 - r_2} \frac{1 + C}{1 - C} (r_2 - r_1) = -2a \frac{1 + C}{1 - C}$$

$$r_1 + r_2 = 2a \frac{C + 1}{C - 1}$$

де

$$r_1 = \sqrt{x^2 + y^2 + (z + a)^2}, \quad r_2 = \sqrt{x^2 + y^2 + (z - a)^2}$$

Це рівняння еліпса!

Задача 8 (№76)

Знайти потенціал ϕ і напруженість $\vec{E}$ електричного поля рівномірно зарядженої по об'єму кулі (шара). Радіус кулі R , заряд q .

Знаходимо розв'язок за допомогою теореми Гауса

$$\oint_S (\vec{E}, d\vec{S}) = \frac{Q}{\epsilon_0}$$

Маємо дві області:

1) : $r < R$ – внутрішня область

2) : $r > R$ – зовнішня область

і границю розділу

$$r = R$$

Спочатку знайдемо поле у внутрішній області $r < R$. Виберемо допоміжну сферичну поверхню S радіуса $r < R$.

Оскільки система має сферичну симетрію, то природно шукати потенціал ϕ і напруженість $\vec{E}$ у вигляді

$$\phi = \phi(r)$$

$$\vec{E} = E(r)\vec{e}_r$$

і перейдемо до сферичної системи координат

$$\begin{aligned}\vec{r} &= r \left[(\vec{i} \cos \alpha + \vec{j} \sin \alpha) \sin \theta + \vec{k} \cos \theta \right] \\ x &= r \sin \theta \cos \alpha, \quad y = r \sin \theta \sin \alpha, \quad z = r \cos \theta \\ r &= \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, \quad \tan \theta = \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{z}, \quad \tan \alpha = \frac{y}{x}\end{aligned}$$

Введемо ортонормований базис сферичної системи координат

$$\begin{aligned}\vec{e}_r &= \frac{\partial \vec{r}}{\partial r} = (\vec{i} \cos \alpha + \vec{j} \sin \alpha) \sin \theta + \vec{k} \cos \theta = \frac{x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}}{r} = \frac{\vec{r}}{r}, \\ \vec{e}_\theta &= \frac{1}{r} \frac{\partial \vec{r}}{\partial \theta} = (\vec{i} \cos \alpha + \vec{j} \sin \alpha) \cos \theta - \vec{k} \sin \theta = (\vec{i}x + \vec{j}y) \frac{\cos \theta}{r \sin \theta} - \vec{k} \sin \theta \\ \vec{e}_\alpha &= \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial \vec{r}}{\partial \alpha} = -\vec{i} \sin \alpha + \vec{j} \cos \alpha = \frac{-y\vec{i} + x\vec{j}}{r \sin \theta} = \frac{-y\vec{i} + x\vec{j}}{\sqrt{x^2 + y^2}}\end{aligned}$$

Застосуємо теорему Гаусса до цієї допоміжної сферичної поверхні радіуса r , враховуючи що нормаль до поверхні співпадає з радіальним базисним вектором:

$\vec{n} = \vec{e}_r$, так, що $d\vec{S} = \vec{n}dS = \vec{e}_r dS$. Маємо

$$\begin{aligned}\oint_{S_r} (\vec{E}^{(1)}, d\vec{S}) &= \oint_{S_r} (E^{(1)}(r) \vec{e}_r, \vec{e}_r dS) = \oint_{S_r} E^{(1)}(r) dS (\vec{e}_r, \vec{e}_r) = \\ &= \oint_{S_r} E^{(1)}(r) dS = E^{(1)}(r) \oint_{S_r} dS = E^{(1)}(r) S_r = 4\pi r^2 E^{(1)}(r).\end{aligned}$$

З другого боку заряд всередині сфери радіуса r дорівнює

$$Q(r) = \int_D \rho dV = \rho \int_D dV = \frac{4\pi}{3} r^3 \rho$$

Заряд сфери радіуса R дорівнює

$$\begin{aligned}q &= Q(R) = \frac{4\pi}{3} R^3 \rho \Rightarrow \\ \rho &= \frac{3}{4\pi R^3} q\end{aligned}$$

Таким чином

$$Q(r) = \frac{4\pi}{3} r^3 \rho = \frac{r^3}{R^3} q$$

Тепер теорема Гаусса говорить

$$\begin{aligned}4\pi r^2 E^{(1)}(r) &= \frac{r^3}{R^3} \frac{q}{\epsilon_0} \Rightarrow \\ E^{(1)}(r) &= \frac{q}{4\pi \epsilon_0 R^3} r, \quad r < R. \\ \vec{E}^{(1)} &= E^{(1)}(r) \vec{e}_r = \frac{qr}{4\pi \epsilon_0 R^3} \frac{\vec{r}}{r} = \frac{q}{4\pi \epsilon_0 R^3} \vec{r}, \quad r < R\end{aligned}$$

Тепер знайдемо поле у зовнішній області $r > R$. Виберемо допоміжну сферичну поверхню S радіуса $r > R$.

Тепер заряд сфери радіуса $r > R$ дорівнює

$$Q(r) = \int_D \rho dV = \rho \int_{D_R} dV = \frac{4\pi}{3} R^3 \rho = q$$

і теорема Гауса дає

$$4\pi r^2 E^{(2)}(r) = \frac{q}{\varepsilon_0} \Rightarrow$$

$$E^{(2)}(r) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}, \quad r > R.$$

$$\vec{E}^{(2)}(r) = E^{(2)}(r)\vec{e}_r = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} \frac{\vec{r}}{r^3} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} \frac{\vec{r}}{r^3}, \quad r > R.$$

Таким чином, напруженість поля системи дорівнює

$$\vec{E} = \begin{cases} \vec{E}^{(1)}(r) \\ \vec{E}^{(2)}(r) \end{cases} = \begin{cases} \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} \frac{\vec{r}}{R^3} = \frac{\rho}{3\varepsilon_0} \vec{r}, & r \leq R \\ \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} \frac{\vec{r}}{r^3}, & r \geq R. \end{cases}$$

Найдемо електричний потенціал цієї системи. Маємо

$$\varphi(\vec{r}) = - \int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}} (\vec{E}, d\vec{r})$$

де

$$\vec{r} = r \left[(\vec{i} \cos \alpha + \vec{j} \sin \alpha) \sin \theta + \vec{k} \cos \theta \right].$$

Оскільки потенціал не залежить від шляху інтегрування, виберемо шлях $\theta = \text{const}$.
 $\alpha = \text{const}$. Тоді

$$d\vec{r} = dr \left[(\vec{i} \cos \alpha + \vec{j} \sin \alpha) \sin \theta + \vec{k} \cos \theta \right] = dr \vec{e}_r$$

і формула для потенціалу набирає вигляду

$$\varphi(r) = - \int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}} (E(r)\vec{e}_r, dr \vec{e}_r) = - \int_{r_0}^r E(r) dr$$

Або в більш загальному вигляді

$$\varphi(r) - \varphi(r_0) = - \int_{r_0}^r E(r) dr$$

Для внутрішній області знаходимо

$$\varphi^{(1)}(r) - \varphi^{(1)}(r_0) = - \int_{r_0}^r E^{(1)}(r) dr = - \int_{r_0}^r \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} \frac{r}{R^3} dr = - \frac{q}{8\pi\varepsilon_0 R^3} (r^2 - r_0^2), \quad r \leq R$$

$$\varphi^{(1)}(r) = - \frac{q}{8\pi\varepsilon_0 R^3} r^2 + C_1, \quad r \leq R$$

$$C_1 = \varphi^{(1)}(r_0) + \frac{q}{8\pi\varepsilon_0 R^3} r_0^2, \quad r_0 \leq R$$

де $r_0 \leq R$ – деяка точка.

Для зовнішній області маємо

$$\varphi^{(2)}(r) - \varphi^{(2)}(r_0) = - \int_{r_0}^r E^{(2)}(r) dr = - \int_{r_0}^r \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} dr = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r} - \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r_0}, \quad r \geq R$$

$$\varphi^{(2)}(r) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r} + C_2, \quad r \geq R$$

$$C_2 = \varphi^{(2)}(r_0) - \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r_0}, \quad r_0 > R$$

Довільні сталі виберемо так, щоб

$$\begin{aligned}\varphi^{(1)}(R) &= \varphi^{(2)}(R) \\ \varphi^{(2)}(r) &= 0, \quad \text{при } r \rightarrow \infty\end{aligned}$$

З другої умови випливає

$$C_2 = 0$$

А перша умова дає

$$\begin{aligned}\varphi^{(1)}(R) = \varphi^{(2)}(R) &\Rightarrow -\frac{q}{8\pi\epsilon_0 R} + C_1 = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 R} \Rightarrow \\ C_1 &= \frac{3q}{8\pi\epsilon_0 R}\end{aligned}$$

Звідси випливає

$$\varphi^{(1)}(r) = -\frac{q}{8\pi\epsilon_0 R^3} r^2 + \frac{3q}{8\pi\epsilon_0 R} = \frac{q}{8\pi\epsilon_0 R} \left(3 - \frac{r^2}{R^2} \right), \quad r \leq R$$

Таким чином

$$\varphi(r) = \begin{cases} \varphi^{(1)}(r) & r \leq R \\ \varphi^{(2)}(r) & r \geq R \end{cases} = \begin{cases} \frac{q}{4\pi\epsilon_0 R} \left(\frac{3}{2} - \frac{r^2}{2R^2} \right), & r \leq R \\ \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r}, & r \geq R \end{cases}$$

Задача 9 (№77)

Знайти потенціал ϕ і напруженість $\vec{E}$ електричного поля сфери, яка рівномірно заряджена по поверхні. Радіус сфери R , заряд q .

Знаходимо розв'язок за допомогою теореми Гауса

$$\oint_S (\vec{E}, d\vec{S}) = \frac{Q}{\epsilon_0}$$

Оскільки система має сферичну симетрію, то природно шукати потенціал ϕ і напруженість $\vec{E}$ у вигляді

$$\phi = \phi(r), \quad \vec{E} = E(r)\vec{e}_r$$

і перейдемо до сферичної системи координат

$$\begin{aligned}\vec{r} &= r \left[(\vec{i} \cos \alpha + \vec{j} \sin \alpha) \sin \theta + \vec{k} \cos \theta \right] \\ x &= r \sin \theta \cos \alpha, \quad y = r \sin \theta \sin \alpha, \quad z = r \cos \theta \\ r &= \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, \quad \tan \theta = \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{z}, \quad \tan \alpha = \frac{y}{x}\end{aligned}$$

Введемо ортонормований базис сферичної системи координат

$$\begin{aligned}\vec{e}_r &= \frac{\partial \vec{r}}{\partial r} = (\vec{i} \cos \alpha + \vec{j} \sin \alpha) \sin \theta + \vec{k} \cos \theta = \frac{x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}}{r} = \frac{\vec{r}}{r}, \\ \vec{e}_\theta &= \frac{1}{r} \frac{\partial \vec{r}}{\partial \theta} = (\vec{i} \cos \alpha + \vec{j} \sin \alpha) \cos \theta - \vec{k} \sin \theta = (\vec{i}x + \vec{j}y) \frac{\cos \theta}{r \sin \theta} - \vec{k} \sin \theta \\ \vec{e}_\alpha &= \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial \vec{r}}{\partial \alpha} = -\vec{i} \sin \alpha + \vec{j} \cos \alpha = \frac{-y\vec{i} + x\vec{j}}{r \sin \theta} = \frac{-y\vec{i} + x\vec{j}}{\sqrt{x^2 + y^2}}\end{aligned}$$

Обчислимо інтеграл, що стоїть у теоремі Гауса відносно деякої допоміжної сферичної поверхні радіуса r . Враховуючи що нормаль до поверхні співпадає з радіальним базисним вектором: $\vec{n} = \vec{e}_r$, так, що $d\vec{S} = \vec{n}dS = \vec{e}_r dS$, маємо

$$\oint_{S_r} (\vec{E}, d\vec{S}) = \oint_{S_r} (E(r)\vec{e}_r, \vec{e}_r dS) = \oint_{S_r} E(r) dS (\vec{e}_r, \vec{e}_r) = \oint_{S_r} E(r) dS = E(r) \oint_{S_r} dS = E(r) S_r = 4\pi r^2 E(r).$$

Тому теорему Гауса можна переписати таким чином

$$4\pi r^2 E(r) = \frac{1}{\epsilon_0} Q(r)$$

де $Q(r)$ – заряд всередині сфери радіуса r .

Системи, що розглядається, розбивається на дві сферичні області:

1) : $r < R$ – внутрішня область

2) : $r > R$ – зовнішня область

з границею розділу

$$r = R$$

Застосуємо теорему Гауса для внутрішньої області $r < R$. Виберемо допоміжну сферичну поверхню S_r радіуса $r < R$. Заряд всередині цієї сфери дорівнює нулю

$$Q(r) = 0, \quad r < R$$

Тому теорема Гауса дає

$$4\pi r^2 E^{(1)}(r) = 0, \quad r < R \Rightarrow$$

$$E^{(1)}(r) = 0, \quad r < R$$

$$\vec{E}^{(1)}(r) = E^{(1)}(r)\vec{e}_r = 0, \quad r < R$$

Тепер знайдемо поле у зовнішній області $r \geq R$. Виберемо допоміжну сферичну поверхню S радіуса $r > R$.

Заряд всередині сфери радіуса $r \geq R$ дорівнює заряду сфери радіуса R

$$Q(r) = \int_{S_r} \sigma dS = q$$

і теорема Гауса дає

$$4\pi r^2 E^{(2)}(r) = \frac{q}{\epsilon_0} \Rightarrow$$

$$E^{(2)}(r) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2}, \quad r \geq R.$$

$$\vec{E}^{(2)}(r) = E^{(2)}(r)\vec{e}_r = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{r}}{r^3} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{r}}{r^3}, \quad r \geq R.$$

Таким чином, напруженість поля системи дорівнює

$$\vec{E}(r) = \begin{cases} \vec{E}^{(1)}(r) \\ \vec{E}^{(2)}(r) \end{cases} = \begin{cases} 0, & r < R \\ \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{r}}{r^3}, & r > R. \end{cases}$$

Найдемо електричний потенціал цієї системи. Маємо

$$\varphi(\vec{r}) = - \int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}} (\vec{E}, d\vec{r})$$

де

$$\vec{r} = r \left[(\vec{i} \cos \alpha + \vec{j} \sin \alpha) \sin \theta + \vec{k} \cos \theta \right].$$

Оскільки потенціал не залежить від шляху інтегрування, виберемо шлях $\theta = const.$

$\alpha = const$. Тоді

$$d\vec{r} = dr \left[(\vec{i} \cos \alpha + \vec{j} \sin \alpha) \sin \theta + \vec{k} \cos \theta \right] = dr \vec{e}_r$$

і формула для потенціалу набирає вигляду

$$\varphi(r) = - \int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}} (E(r) \vec{e}_r, d\vec{r} \vec{e}_r) = - \int_{r_0}^r E(r) dr$$

Або в більш загальному вигляді

$$\varphi(r) - \varphi(r_0) = - \int_{r_0}^r E(r) dr$$

Для внутрішній області знаходимо

$$\varphi^{(1)}(r) - \varphi^{(1)}(r_0) = - \int_{r_0}^r E^{(1)}(r) dr = 0, \quad r \leq R$$

$$\varphi^{(1)}(r) = C_1 = \varphi^{(1)}(r_0), \quad r \leq R, \quad r_0 \leq R$$

де $r_0 \leq R$ – деяка точка.

Для зовнішній області маємо

$$\varphi^{(2)}(r) - \varphi^{(2)}(r_0) = - \int_{r_0}^r E^{(2)}(r) dr = - \int_{r_0}^r \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} dr = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r} - \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r_0}, \quad r \geq R$$

$$\varphi^{(2)}(r) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r} + C_2, \quad r \geq R$$

$$C_2 = \varphi^{(2)}(r_0) - \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r_0}, \quad r_0 > R$$

Довільні сталі виберемо так, щоб

$$\varphi^{(1)}(R) = \varphi^{(2)}(R)$$

$$\varphi^{(2)}(r) = 0, \quad \text{при } r \rightarrow \infty$$

З другої умови випливає

$$C_2 = 0$$

А перша умова дає

$$\varphi^{(1)}(R) = \varphi^{(2)}(R) \Rightarrow C_1 = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 R} \Rightarrow$$

$$C_1 = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 R}$$

Звідси випливає величина потенціалу системи

$$\varphi(r) = \begin{cases} \varphi^{(1)}(r) & r < R \\ \varphi^{(2)}(r) & r > R \end{cases} = \begin{cases} \frac{q}{4\pi\epsilon_0 R}, & r < R \\ \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r}, & r > R \end{cases}$$

Задача 10 (№78)

У середині кулі (шара) радіуса R , яка рівномірно заряджена по об'єму з густиною ρ , маємо незаряджену сферичну порожнину з радіусом R_1 центр якої відстоїть від центра кулі на відстані a , так що $a + R_1 < R$. Знайти електричне поле $\vec{E}$ в порожнечі.

Розв'язуємо задачу за допомогою принципу суперпозиції. Представимо систему

у вигляді двох суміщених куль з радіусами R і R_1 , які заряджені рівномірно з густиною ρ і $-\rho$, відповідно. Нехай $\vec{E}_0$ електричне поле великої кулі, а $\vec{E}_1$ електричне поле малої кулі. Тоді електричне поле $\vec{E}$ суміщених куль, відповідно з принципом суперпозиції, буде

$$\vec{E} = \vec{E}_0 + \vec{E}_1$$

Поле усередині великої кулі дорівнює (див. задачу 8)

$$\vec{E}_0 = \frac{q_0}{4\pi\epsilon_0 R^3} \vec{r}_0$$

де

$$q_0 = \frac{4}{3}\pi R^3 \rho$$

– заряд великої кулі, а ρ – густина заряду усереднені великої кулі. Звідси електричне поле усередині великої кулі буде

$$\vec{E}_0 = \frac{\rho}{3\epsilon_0} \vec{r}_0$$

Аналогічно поле усереднені малої кулі буде

$$\vec{E}_1 = -\frac{\rho}{3\epsilon_0} \vec{r}_1$$

де $-\rho$ – густина заряду усереднені малої кулі, яка за умовою притилежна устину заряду усереднені великої кулі.

Таким чином, електричне поле $\vec{E}$ усереднені незарядженої сферичної порожнини, яка утворена суміщенням куль, відповідно з принципом суперпозиції, буде

$$\vec{E} = \vec{E}_0 + \vec{E}_1 = \frac{\rho}{3\epsilon_0} \vec{r}_0 - \frac{\rho}{3\epsilon_0} \vec{r}_1 = \frac{\rho}{3\epsilon_0} (\vec{r}_0 - \vec{r}_1) = \frac{\rho}{3\epsilon_0} \vec{a} = \text{const}$$

де

$$\vec{a} = \vec{r}_0 - \vec{r}_1$$

вектор, який з'єднує центри цих куль.

Отже електричне поле усереднені незарядженої сферичної порожнини буде постійним

$$\vec{E} = \frac{\rho}{3\epsilon_0} \vec{a} = \text{const}$$

і спрямованим вздовж лінії, що з'єднує центри куль.

Задача 11 (№79)

Простір між концентричними сферами з радіусами R_1 і R_2 , заряджена з об'ємною густиною $\rho = \alpha/r^2$. Знайти повний заряд q , потенціал ϕ і напруженість $\vec{E}$ електричного поля.

Знаходимо розв'язок за допомогою теореми Гауса

$$\oint_S (\vec{E}, d\vec{S}) = \frac{Q}{\epsilon_0}$$

Оскільки система має сферичну симетрію, то природно шукати потенціал φ і напруженість $\vec{E}$ у вигляді

$$\varphi = \varphi(r), \quad \vec{E} = E(r)\vec{e}_r$$

і перейдемо до сферичної системи координат

$$\vec{r} = r \left[(\vec{i} \cos \alpha + \vec{j} \sin \alpha) \sin \theta + \vec{k} \cos \theta \right]$$

$$x = r \sin \theta \cos \alpha, \quad y = r \sin \theta \sin \alpha, \quad z = r \cos \theta$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, \quad \tan \theta = \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{z}, \quad \tan \alpha = \frac{y}{x}$$

Введемо ортонормований базис сферичної системи координат

$$\vec{e}_r = \frac{\partial \vec{r}}{\partial r} = (\vec{i} \cos \alpha + \vec{j} \sin \alpha) \sin \theta + \vec{k} \cos \theta = \frac{x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}}{r} = \frac{\vec{r}}{r},$$

$$\vec{e}_\theta = \frac{1}{r} \frac{\partial \vec{r}}{\partial \theta} = (\vec{i} \cos \alpha + \vec{j} \sin \alpha) \cos \theta - \vec{k} \sin \theta$$

$$\vec{e}_\alpha = \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial \vec{r}}{\partial \alpha} = -\vec{i} \sin \alpha + \vec{j} \cos \alpha$$

Обчислимо інтеграл, що стоїть у теоремі Гаусса відносно деякої допоміжної сферичної поверхні радіуса r . Враховуючи що нормаль до поверхні співпадає з радіальним базисним вектором: $\vec{n} = \vec{e}_r$, так, що $d\vec{S} = \vec{n}dS = \vec{e}_r dS$, маємо

$$\oint_{S_r} (\vec{E}, d\vec{S}) = \oint_{S_r} (E(r)\vec{e}_r, \vec{e}_r dS) = \oint_{S_r} E(r) dS (\vec{e}_r, \vec{e}_r) = \oint_{S_r} E(r) dS = E(r) \oint_{S_r} dS = E(r) S_r = 4\pi r^2 E(r).$$

Тому, теорему Гаусса можна переписати таким чином

$$4\pi r^2 E^{(1)}(r) = \frac{1}{\epsilon_0} Q(r)$$

де $Q(r)$ – заряд всередині сфери радіуса r .

Системи, що розглядається, розбивається на три сферичні області:

$$1) D_1 : r \leq R_1$$

$$2) D_2 : R_1 \leq r \leq R_2$$

$$3) D_3 : r \geq R_2$$

з двома границями розділу

$$r = R_1$$

$$r = R_2$$

Застосуємо теорему Гаусса для першої області D_1 . Виберемо допоміжну сферичну поверхню S_r радіуса $r \in D_1$. Заряд всередині цієї сфери дорівнює нулю

$$Q(r) = 0, \quad r \leq R_1$$

Тому теорема Гаусса дає

$$4\pi r^2 E^{(1)}(r) = 0, \quad r < R \Rightarrow E^{(1)}(r) = 0, \quad r < R$$

$$\vec{E}^{(1)}(r) = E^{(1)}(r)\vec{e}_r = 0, \quad r < R_1$$

Тепер знайдемо поле у другій області D_2 . Виберемо допоміжну сферичну поверхню S_r радіуса $r \in D_2$.

Заряд всередині сферичного кільця $R_1 \leq r' \leq r$, в силу сферичної симетрії, коли $dV = 4\pi r'^2 dr'$, і за умовою $\rho = \alpha/r'^2$, дорівнює

$$Q(r) = \int_{S_r} \rho dV = \int_{R_1}^r \frac{\alpha}{r'^2} 4\pi r'^2 dr' = 4\pi\alpha \int_{R_1}^r dr' = 4\pi\alpha(r - R_1)$$

Звідси заряд усереднені області $D_2 : R_1 \leq r \leq R_2$ дорівнює

$$q = Q(R_2) = \int_{R_1}^{R_2} \frac{\alpha}{r'^2} 4\pi r'^2 dr' = 4\pi\alpha \int_{R_1}^{R_2} dr' = 4\pi\alpha(R_2 - R_1).$$

Звідси одержуємо

$$\alpha = \frac{q}{4\pi(R_2 - R_1)}$$

Теорема Гауса для сфери радіуса $r \in \{R_1 \leq r \leq R_2\}$ тепер говорить

$$4\pi r^2 E^{(2)}(r) = \frac{1}{\epsilon_0} 4\pi\alpha(r - R_1) \Rightarrow$$

Звідси

$$E^{(2)}(r) = \frac{\alpha}{\epsilon_0} \left(\frac{r - R_1}{r^2} \right), \quad R_1 \leq r \leq R_2$$

$$\vec{E}^{(2)}(r) = E^{(2)}(r) \vec{e}_r = \frac{\alpha}{\epsilon_0} \left(\frac{r - R_1}{r^2} \right) \frac{\vec{r}}{r} = \frac{\alpha}{\epsilon_0} (r - R_1) \frac{\vec{r}}{r^3}, \quad R_1 \leq r \leq R_2.$$

Підставляя сюди залежність коефіцієнта α від заряду сферичного кільця $D_2 : R_1 \leq r \leq R_2$ маємо

$$E^{(2)}(r) = \frac{\alpha}{\epsilon_0} \left(\frac{r - R_1}{r^2} \right) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{(r - R_1)}{(R_2 - R_1)r^2}, \quad R_1 \leq r \leq R_2$$

$$\vec{E}^{(2)}(r) = \frac{\alpha}{\epsilon_0} (r - R_1) \frac{\vec{r}}{r^3} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{(r - R_1)}{(R_2 - R_1)} \frac{\vec{r}}{r^3}, \quad R_1 \leq r \leq R_2$$

Знайдемо поле у третій області D_3 . Виберемо допоміжну сферичну поверхню S_r радіуса $r > R_2$. Заряд всередині цієї сфери дорівнює заряду сферичного кільця $D_2 : R_1 \leq r \leq R_2$, тобто

$$Q(r) = q = 4\pi\alpha(R_2 - R_1), \quad r > R_2$$

Тепер теорема Гауса говорить

$$4\pi r^2 E^{(3)}(r) = \frac{q}{\epsilon_0}, \quad r > R_2$$

Звідси

$$E^{(3)}(r) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2}, \quad r > R_2$$

$$\vec{E}^{(3)}(r) = E^{(3)}(r) \vec{e}_r = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \frac{\vec{r}}{r}, \quad r > R_2$$

Таким чином, напруженість поля системи дорівнює

$$E(r) = \begin{cases} E^{(1)}(r) \\ E^{(2)}(r) \\ E^{(3)}(r) \end{cases} = \begin{cases} 0, & r < R_1 \\ \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{(r - R_1)}{(R_2 - R_1)r^2}, & R_1 \leq r \leq R_2 \\ \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2}, & r > R_2 \end{cases}$$

Найдемо електричний потенціал цієї системи. З визначення маємо

$$\vec{E} = -\nabla\phi$$

У сферично-симетричному випадку маємо

$$\vec{E} = E(r)\vec{e}_r = -\nabla\varphi(r) = -\frac{d\varphi}{dr}\nabla r = -\frac{d\varphi}{dr}\frac{\vec{r}}{r} = -\frac{d\varphi}{dr}\vec{e}_r \Rightarrow$$

$$E(r) = -\frac{d\varphi}{dr}$$

$$\int_{r_0}^r d\varphi = -\int_{r_0}^r E(r)dr$$

де r_0 – деяка точка у відповідній області. Звідси формула для потенціалу набирає вигляду

$$\varphi(r) - \varphi(r_0) = -\int_{r_0}^r E(r)dr$$

або

$$\varphi(r) = -\int_{r_0}^r E(r)dr + C = -\int E(r)dr + C$$

$$C = \varphi(r_0) + \int_{r_0}^{r_0} E(r)dr$$

де C – довільна стала

Для області D_1 знаходимо

$$\varphi^{(1)}(r) = -\int E^{(1)}(r)dr + C_1 = C_1, \quad r \leq R_1$$

Для області $D_2 : R_1 \leq r \leq R_2$ маємо

$$\varphi^{(2)}(r) = C_2 - \int E^{(2)}(r)dr = C_2 - \int \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{(r-R_1)}{(R_2-R_1)r^2} dr =$$

$$= C_2 - \frac{q}{4\pi\epsilon_0(R_2-R_1)} \int \left(\frac{1}{r} - \frac{R_1}{r^2} \right) dr = C_2 - \frac{q}{4\pi\epsilon_0(R_2-R_1)} \left(\ln r + \frac{R_1}{r} \right) =$$

$$\varphi^{(2)}(r) = C_2 - \frac{q}{4\pi\epsilon_0(R_2-R_1)} \left(\ln r + \frac{R_1}{r} \right), \quad R_1 \leq r \leq R_2$$

Для зовнішній області D_3 аналогічно знаходимо

$$\varphi^{(3)}(r) = C_3 - \int E^{(2)}(r)dr = C_3 - \int \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} dr = C_3 + \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r}$$

Зазвичай вимагають, щоб

$$\varphi^{(3)}(r) = 0, \quad \text{при } r \rightarrow \infty \Rightarrow C_3 = 0$$

Тоді

$$\varphi^{(3)}(r) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r}$$

З умови безперервності потенціалів маємо

$$\varphi^{(1)}(R_1) = \varphi^{(2)}(R_1)$$

$$\varphi^{(2)}(R_2) = \varphi^{(3)}(R_2)$$

Ці співвідношення дають

$$\Rightarrow C_1 = C_2 - \frac{q}{4\pi\epsilon_0(R_2 - R_1)}(\ln R_1 + 1)$$

$$\Rightarrow C_2 - \frac{q}{4\pi\epsilon_0(R_2 - R_1)}\left(\ln R_2 + \frac{R_1}{R_2}\right) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 R_2}$$

Тоді

$$C_2 = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 R_2} + \frac{q}{4\pi\epsilon_0(R_2 - R_1)}\left(\ln R_2 + \frac{R_1}{R_2}\right)$$

$$C_1 = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 R_2} + \frac{q}{4\pi\epsilon_0(R_2 - R_1)}\left(\ln R_2 + \frac{R_1}{R_2}\right) - \frac{q}{4\pi\epsilon_0(R_2 - R_1)}(\ln R_1 + 1) =$$

$$= \frac{q}{4\pi\epsilon_0 R_2} + \frac{q}{4\pi\epsilon_0(R_2 - R_1)}\left(\ln \frac{R_2}{R_1} - 1 + \frac{R_1}{R_2}\right) =$$

$$= \frac{q}{4\pi\epsilon_0(R_2 - R_1)} \ln \frac{R_2}{R_1}$$

Використовуючи ці константи для полів знаходимо

$$\varphi^{(2)}(r) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 R_2} + \frac{q}{4\pi\epsilon_0(R_2 - R_1)}\left(\ln R_2 + \frac{R_1}{R_2}\right) - \frac{q}{4\pi\epsilon_0(R_2 - R_1)}\left(\ln r + \frac{R_1}{r}\right) =$$

$$= \frac{q}{4\pi\epsilon_0 R_2} + \frac{q}{4\pi\epsilon_0(R_2 - R_1)}\left(\ln R_2 + \frac{R_1}{R_2} - \ln r - \frac{R_1}{r}\right)$$

$$= \frac{q}{4\pi\epsilon_0(R_2 - R_1)}\left(1 - \frac{R_1}{r} - \ln \frac{r}{R_2}\right), \quad R_1 \leq r \leq R_2$$

$$\varphi^{(1)}(r) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0(R_2 - R_1)} \ln \frac{R_2}{R_1}$$

Таким чином, потенціали електростатичного поля системи дорівнюють

$$\varphi(r) = \begin{cases} \varphi^{(1)}(r) & r \leq R_1 \\ \varphi^{(2)}(r) & R_1 \leq r \leq R_2 \\ \varphi^{(3)}(r) & r > R_2 \end{cases} = \begin{cases} \frac{q}{4\pi\epsilon_0(R_2 - R_1)} \ln \frac{R_2}{R_1}, & r \leq R_1 \\ \frac{q}{4\pi\epsilon_0(R_2 - R_1)}\left(1 - \frac{R_1}{r} - \ln \frac{r}{R_2}\right), & R_1 \leq r \leq R_2 \\ \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r}, & r > R_2 \end{cases}$$

Задача 12а (№80)

Знайти енергію W електростатичного поля для рівномірно зарядженої по об'єму кулі (шара). Радіус кулі R , заряд q .

Енергію електростатичного поля даної системи зручно шукати за формулою

$$W = \frac{1}{2} \int_D \rho \varphi dv$$

У даному випадку, коли $\rho = const$ і система сферично-симетрична, маємо,

$$\varphi = \varphi(r), \quad dv = 4\pi r^2 dr$$

Тому

$$W = 2\pi\rho \int_0^R \varphi(r) r^2 dr$$

Потенціал електростатичного поля даної системи було знайден у задачі 8:

$$\varphi(r) = \begin{cases} \varphi^{(1)}(r) & r \leq R \\ \varphi^{(2)}(r) & r \geq R \end{cases} = \begin{cases} \frac{q}{4\pi\epsilon_0 R} \left(\frac{3}{2} - \frac{r^2}{2R^2} \right), & r \leq R \\ \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r}, & r \geq R \end{cases}$$

Нас цікавить поле всередині кулі

$$\varphi^{(1)}(r) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 R} \left(\frac{3}{2} - \frac{r^2}{2R^2} \right), \quad r \leq R$$

де q – заряд кулі, причому

$$q = \frac{4}{3}\pi\rho R^3 \Rightarrow \rho = \frac{3q}{4\pi R^3}$$

Підставляючи $\varphi^{(1)}(r)$ і ρ в формулу для енергії знаходимо

$$\begin{aligned} W &= 2\pi\rho \int_0^R \frac{q}{4\pi\epsilon_0 R} \left(\frac{3}{2} - \frac{r^2}{2R^2} \right) r^2 dr = \\ &= \pi \frac{3q}{4\pi R^3} \frac{q}{4\pi\epsilon_0 R} \left(3\frac{r^3}{3} - \frac{r^5}{5R^2} \right) \Big|_0^R = \frac{3q^2}{16\pi\epsilon_0 R^4} \left(3\frac{R^3}{3} - \frac{R^5}{5R^2} \right) = \\ &= \frac{3q^2}{4\pi\epsilon_0 R^4} \frac{R^3}{5} = \frac{3q^2}{20\pi\epsilon_0 R} \end{aligned}$$

Отже

$$W = \frac{3q^2}{20\pi\epsilon_0 R}$$

Задача 12b (№80)

Знайти енергію W електростатичного поля для сфери, яка рівномірно заряджена по поверхні. Радіус сфери R , заряд q .

Енергію електростатичного поля даної системи зручно шукати за формулою

$$W = \frac{1}{2} \int_S \sigma \varphi dS$$

У даному випадку, коли $\sigma = const$ і система сферично-симетрична, маємо,

$$\varphi = \varphi(r)$$

$$W = \frac{\sigma}{2} \int_{S_R} \varphi(R) dS = \frac{\sigma}{2} \varphi(R) \int_{S_R} dS = \frac{\sigma}{2} \varphi(R) S = 2\pi\sigma\varphi(R)R^2 = \frac{1}{2}q\varphi(R)$$

де q – заряд кулі, причому

$$q = 4\pi\sigma R^2 \Rightarrow \sigma = \frac{q}{4\pi R^2}$$

Потенціал електростатичного поля даної системи було знайден у задачі 9

$$\varphi(r) = \begin{cases} \varphi^{(1)}(r) & r < R \\ \varphi^{(2)}(r) & r > R \end{cases} = \begin{cases} \frac{q}{4\pi\epsilon_0 R}, & r < R \\ \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r}, & r > R \end{cases}$$

Нас цікавить поле на поверхні кулі

$$\varphi(R) = \varphi^{(1)}(R) = \varphi^{(2)}(R) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 R}$$

Підставляючи $\varphi(R)$ і σ в формулу для енергії знаходимо

$$W = 2\pi\sigma\varphi(R)R^2 = 2\pi\frac{q}{4\pi R^2}\frac{q}{4\pi\epsilon_0 R}R^2 = \frac{q^2}{8\pi\epsilon_0 R}$$

Задача 12с(№80)

Знайти енергію W електростатичного поля зарядженого сферичного кільця $R_1 \leq r \leq R_2$, з об'ємною густиною $\rho = \alpha/r^2$. Внутрішній і зовнішній радіуси кільця R_1 і R_2 , відповідно.

Енергію електростатичного поля даної системи зручно шукати за формулою

$$W = \frac{1}{2} \int_D \rho\varphi dv$$

Для даної сферично-симетричної системи маємо,

$$\varphi = \varphi(r), \quad \rho = \rho(r) = \frac{\alpha}{r^2}, \quad dv = 4\pi r^2 dr$$

Тому

$$W = 2\pi \int_{R_1}^{R_2} \rho(r)\varphi(r)r^2 dr$$

Потенціал електростатичного поля даної системи було знайдено у задачі 11:

$$\varphi(r) = \begin{cases} \varphi^{(1)}(r) & r \leq R_1 \\ \varphi^{(2)}(r) & R_1 \leq r \leq R_2 \\ \varphi^{(3)}(r) & r > R_2 \end{cases} = \begin{cases} \frac{q}{4\pi\epsilon_0(R_2-R_1)} \ln \frac{R_2}{R_1}, & r \leq R_1 \\ \frac{q}{4\pi\epsilon_0(R_2-R_1)} \left(1 - \frac{R_1}{r} - \ln \frac{r}{R_2}\right), & R_1 \leq r \leq R_2 \\ \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r}, & r > R_2 \end{cases}$$

Нас цікавить поле всередині сферичного кільця $R_1 \leq r \leq R_2$

$$\varphi^{(2)}(r) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0(R_2-R_1)} \left(1 - \frac{R_1}{r} - \ln \frac{r}{R_2}\right), \quad R_1 \leq r \leq R_2$$

де q – заряд кулі, причому

$$q = 4\pi\alpha(R_2 - R_1) \Rightarrow \alpha = \frac{q}{4\pi(R_2 - R_1)}$$

Звідси впливає вираз для густини заряду

$$\rho(r) = \frac{\alpha}{r^2} = \frac{q}{4\pi(R_2 - R_1)} \frac{1}{r^2}$$

Підставляючи $\varphi^{(2)}(r)$ і $\rho(r)$ в формулу для енергії знаходимо

$$\begin{aligned} W &= 2\pi \int_{R_1}^{R_2} \frac{q}{4\pi(R_2 - R_1)} \frac{1}{r^2} \frac{q}{4\pi\epsilon_0(R_2 - R_1)} \left(1 - \frac{R_1}{r} - \ln \frac{r}{R_2}\right) r^2 dr = \\ &= \frac{2\pi}{\epsilon_0} \left(\frac{q}{4\pi(R_2 - R_1)}\right)^2 \int_{R_1}^{R_2} \left(1 - \frac{R_1}{r} - \ln \frac{r}{R_2}\right) dr = \\ &= \frac{2\pi}{\epsilon_0} \frac{q^2}{(4\pi)^2 (R_2 - R_1)^2} \left[\int_{R_1}^{R_2} \left(1 - \frac{R_1}{r}\right) dr - \int_{R_1}^{R_2} \left(\ln \frac{r}{R_2}\right) dr \right] = \\ &= \frac{q^2}{8\pi\epsilon_0 (R_2 - R_1)^2} \left[(r - R_1 \ln r) \Big|_{R_1}^{R_2} - \int_{R_1}^{R_2} \left(\ln \frac{r}{R_2}\right) dr \right] \end{aligned}$$

В інтегралі, що залишився, спочатку робимо заміну змінних

$$\int_{R_1}^{R_2} \left(\ln \frac{r}{R_2} \right) dr = R_2 \int_{R_1}^{R_2} \left(\ln \frac{r}{R_2} \right) d\left(\frac{r}{R_2} \right) = R_2 \int_{x_1}^{x_2} (\ln x) dx$$

$$x = \frac{r}{R_2}, \quad x_2 = 1, \quad x_1 = \frac{R_1}{R_2}$$

а потім беремо по частинах

$$\int_{x_1}^{x_2} (\ln x) dx = \left\{ \begin{array}{l} u = \ln x, \quad du = \frac{dx}{x} \\ dv = dx, \quad v = x \end{array} \right\} = x \ln x - x \Big|_{x_1}^{x_2} = x_2 \ln x_2 - x_1 \ln x_1 - x_2 + x_1$$

Значить

$$\int_{R_1}^{R_2} \left(\ln \frac{r}{R_2} \right) dr = R_2 [x_2 \ln x_2 - x_1 \ln x_1 - (x_2 - x_1)] =$$

$$= R_2 \left[-\frac{R_1}{R_2} \ln \frac{R_1}{R_2} - 1 + \frac{R_1}{R_2} \right] = -R_1 \ln \frac{R_1}{R_2} - R_2 + R_1$$

В результаті отримуємо

$$W = \frac{q^2}{8\pi\epsilon_0(R_2 - R_1)^2} \left[R_2 - R_1 - R_1 \ln \frac{R_2}{R_1} + R_1 \ln \frac{R_1}{R_2} + R_2 - R_1 \right] =$$

$$= \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0(R_2 - R_1)^2} \left[R_2 - R_1 - R_1 \ln \frac{R_2}{R_1} \right] =$$

$$= \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0(R_2 - R_1)} - \frac{q^2 R_1}{4\pi\epsilon_0(R_2 - R_1)^2} \ln \frac{R_2}{R_1}$$

Таким чином, енергія електростатичного поля зарядженого сферичного кільця $R_1 \leq r \leq R_2$ з об'ємною густиною $\rho = \alpha/r^2$ дорівнює

$$W = \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0(R_2 - R_1)} - \frac{q^2 R_1}{4\pi\epsilon_0(R_2 - R_1)^2} \ln \frac{R_2}{R_1}$$

Задача 12d

Усередині кулі (шара) радіуса R , яка рівномірно заряджена по об'єму з густиною ρ , маємо незаряджену сферичну порожнину з радіусом R_1 центр якої відстоїть від центра кулі на відстані a , так що $a + R_1 < R$. Знайти енергію W електростатичного поля усередині порожнини.

Енергію електростатичного поля порожнини зручно шукати за формулою

$$W = \frac{\epsilon_0}{2} \int_D E^2 dv$$

Поле в порожнині постійне і дорівнює (див. задачу 10)

$$\vec{E} = \frac{\rho}{3\epsilon_0} \vec{a} = \text{const}$$

де

$$\vec{a} = \vec{r}_0 - \vec{r}_1$$

вектор, який з'єднує центри цих куль. Тому

$$W = \frac{\epsilon_0}{2} E^2 \int_D dv = \frac{\epsilon_0}{2} E^2 V = \frac{\epsilon_0}{2} E^2 \frac{4}{3} \pi R_1^3 = \frac{2\pi\epsilon_0}{3} E^2 R_1^3$$

Звідси одержуємо

$$W = \frac{2\pi\epsilon_0}{3} E^2 R_1^3 = \frac{2\pi\epsilon_0}{3} \left(\frac{\rho}{3\epsilon_0} \vec{a} \right)^2 R_1^3 = \frac{2\pi\rho^2}{27\epsilon_0} a^2 R_1^3$$

Задача 13(№81)

Заряд розподілений сферически симетричним чином $\rho = \rho(r)$. Розбивши розподіл заряду на сферичні шари, виразити через $\rho(r)$ потенціал φ і напруженість $\vec{E}$ поля (записати φ і $\vec{E}$ у вигляді одноразового інтеграла по r).

Знаходимо напруженість $\vec{E}$ поля за допомогою теореми Гауса

$$\oint_S (\vec{E}, d\vec{S}) = \frac{Q}{\epsilon_0}$$

Виберемо допоміжну сферичну поверхню S_r радіуса r . Знайдемо поле у внутрішній області $r < R$. Оскільки система має сферичну симетрію, то природно шукати потенціал φ і напруженість $\vec{E}$ у вигляді

$$\varphi = \varphi(r), \quad \vec{E} = E(r)\vec{e}_r$$

і перейдемо до сферичної системи координат

$$\vec{r} = r \left[(\vec{i} \cos \alpha + \vec{j} \sin \alpha) \sin \theta + \vec{k} \cos \theta \right]$$

$$x = r \sin \theta \cos \alpha, \quad y = r \sin \theta \sin \alpha, \quad z = r \cos \theta$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, \quad \tan \theta = \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{z}, \quad \tan \alpha = \frac{y}{x}$$

Введемо ортонормованій базис сферичної системи координат

$$\vec{e}_r = \frac{\partial \vec{r}}{\partial r} = (\vec{i} \cos \alpha + \vec{j} \sin \alpha) \sin \theta + \vec{k} \cos \theta = \frac{x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}}{r} = \frac{\vec{r}}{r},$$

$$\vec{e}_\theta = \frac{1}{r} \frac{\partial \vec{r}}{\partial \theta} = (\vec{i} \cos \alpha + \vec{j} \sin \alpha) \cos \theta - \vec{k} \sin \theta = (\vec{i}x + \vec{j}y) \frac{\cos \theta}{r \sin \theta} - \vec{k} \sin \theta$$

$$\vec{e}_\alpha = \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial \vec{r}}{\partial \alpha} = -\vec{i} \sin \alpha + \vec{j} \cos \alpha = \frac{-y\vec{i} + x\vec{j}}{r \sin \theta} = \frac{-y\vec{i} + x\vec{j}}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

Застосуємо теорему Гауса до допоміжної сферичної поверхні радіуса r , враховуючи що нормаль до поверхні співпадає з радіальним базисним вектром:

$\vec{n} = \vec{e}_r$, так, що $d\vec{S} = \vec{n}dS = \vec{e}_r dS$. Маємо

$$\oint_{S_r} (\vec{E}, d\vec{S}) = \oint_{S_r} (E(r)\vec{e}_r, \vec{e}_r dS) = \oint_{S_r} E(r) dS (\vec{e}_r, \vec{e}_r) = \oint_{S_r} E(r) dS = E(r) \oint_{S_r} dS = E(r) S_r = 4\pi r^2 E(r).$$

З другого боку заряд всередині сфери радіуса r дорівнює

$$Q(r) = \int_D \rho dV = 4\pi \int_0^r \rho(\dot{r}) \dot{r}^2 d\dot{r}$$

Тепер теорема Гауса говорить

$$4\pi r^2 E(r) = 4\pi \int_0^r \rho(\dot{r}) \dot{r}^2 d\dot{r} \Rightarrow$$

Звідси

$$E(r) = \frac{1}{\varepsilon_0 r^2} \int_0^r \rho(r') r'^2 dr' \Rightarrow$$

$$\vec{E} = E(r) \vec{e}_r = \frac{\vec{r}}{\varepsilon_0 r^3} \int_0^r \rho(r') r'^2 dr'$$

Знайдемо формулу для потенціала з урахуванням сферичної симетрії

$$\vec{E} = -\text{grad } \varphi \Rightarrow$$

$$E(r) \vec{e}_r = -\left(\vec{i} \frac{\partial}{\partial x} + \vec{j} \frac{\partial}{\partial y} + \vec{k} \frac{\partial}{\partial z}\right) \varphi(r) = -\left(\vec{i} \frac{\partial r}{\partial x} + \vec{j} \frac{\partial r}{\partial y}\right) \frac{d\varphi(r)}{dr} = -\left(\frac{\vec{i}x}{r} + \frac{\vec{j}y}{r}\right) \frac{d\varphi(r)}{dr} = -\frac{d\varphi(r)}{dr} \vec{e}_r$$

Звідси

$$E(r) = -\frac{d\varphi(r)}{dr}$$

Далі, інтегруючи в межах від R і до ∞ , маємо

$$\begin{aligned} \int_R^\infty d\varphi(r) &= -\int_R^\infty E(r) dr \Rightarrow \\ \varphi(\infty) - \varphi(r) &= -\int_r^\infty E(r') dr' = -\int_r^\infty \frac{1}{\varepsilon_0 r'^2} \int_0^{r'} \rho(r'') r''^2 dr'' dr' \end{aligned}$$

Ми вважаємо, що

$$\varphi(\infty) = 0$$

Тому

$$\varphi(r) = \frac{1}{\varepsilon_0} \int_r^\infty \frac{1}{r'^2} \int_0^{r'} \rho(r'') r''^2 dr'' dr'$$

Далі беремо інтеграл по частинам

$$\begin{aligned} u &= \int_0^{r'} \rho(r'') r''^2 dr'' = \frac{Q(r')}{4\pi}, \quad du = \rho(r') r'^2 dr' \\ dv &= \frac{dr'}{r'^2}, \quad v = -\frac{1}{r'} \\ \varphi(r) &= \frac{1}{\varepsilon_0} \left\{ -\frac{1}{r'} \frac{Q(r')}{4\pi} \Big|_r^\infty + \int_r^\infty \rho(r') r' dr' \right\} = \\ &= \frac{1}{\varepsilon_0} \left\{ -\lim_{r' \rightarrow \infty} \frac{1}{r'} \frac{Q(r')}{4\pi} + \frac{1}{r} \frac{Q(r)}{4\pi} + \int_r^\infty \rho(r') r' dr' \right\} \end{aligned}$$

Накладемо наступну умову

$$Q(r) = 4\pi \int_0^r \rho(r') r'^2 dr' < \infty, \quad \forall r$$

Тоді

$$\varphi(R) = \frac{1}{\varepsilon_0 r} \frac{Q(r)}{4\pi} + \frac{1}{\varepsilon_0} \int_r^\infty \rho(r') r' dr'$$

Таким чином, для потенціалу маємо

$$\varphi(R) = \frac{1}{\varepsilon_0 r} \int_0^r \rho(r') r'^2 dr' + \frac{1}{\varepsilon_0} \int_r^\infty \rho(r') r' dr'$$

Задача 14(№83)

Заряд електрона розподілений в атомі водню, що знаходиться в нормальному стані, з густиною

$$\rho(r) = -\frac{e_0}{\pi a^3} e^{-2r/a}$$

$a = 0,529 \cdot 10^{-8} \text{ cm}$ – борівський радіус атома, $e_0 = 4,8 \cdot 10^{-10} \text{ CGSE}$ - елементарний заряд. Знайти потенціал φ_e і напруженість $\vec{E}_{er}$ електричного поля електронного заряду, а також повні потенціал φ і напруженість поля $\vec{E}$ в атомі, вважаючи, що протоний заряд зосереджений на початку координат.

Згідно задача 13 маємо

$$\varphi_e(R) = \frac{1}{\varepsilon_0 r} \int_0^r \rho(r') r'^2 dr' + \frac{1}{\varepsilon_0} \int_r^\infty \rho(r') r' dr'$$

Тоді

$$\varphi_e(R) = -\frac{e_0}{\varepsilon_0 \pi a^3} \left\{ \frac{1}{r} \int_0^r e^{-2r'/a} r'^2 dr' + \int_r^\infty e^{-2r'/a} r' dr' \right\}$$

Щоб обчислити цей вираз, розглянемо спочатку другий інтеграл. Використовуючи метод диференціювання по параметру, послідовно маємо

$$\int_r^\infty e^{-2r'/a} r' dr' = \int_r^\infty e^{-br'} r' dr' = -\frac{d}{db} \int_r^\infty e^{-br'} dr' = -\frac{d}{db} \left(\frac{1}{b} e^{-br} \right) = \frac{1}{b^2} (1 + br) e^{-br} = \frac{a^2}{4} \left(1 + \frac{2r}{a} \right) e^{-2r/a}$$

де ми тимчасово позначили

$$x = br' = \frac{2r'}{a} \Rightarrow r' = \frac{a}{2} x = \frac{x}{b}, \quad b = \frac{2}{a}$$

Аналогічно, за допомогою метода диференціювання по параметру, з першого інтеграла знаходимо

$$\begin{aligned} \int_0^r e^{-2r'/a} r'^2 dr' &= \int_0^r e^{-br'} r'^2 dr' = \frac{d^2}{db^2} \int_0^r e^{-br'} dr' = \frac{d^2}{db^2} \frac{1}{b} \int_0^{br} e^{-x} dx = \\ &= \frac{d^2}{db^2} \frac{1}{b} (1 - e^{-rb}) = \frac{d}{db} \left[\frac{1}{b^2} (e^{-rb} - 1) + \frac{1}{b} r e^{-rb} \right] = \\ &= -\frac{2}{b^3} (e^{-rb} - 1) - \frac{r}{b^2} e^{-rb} - \frac{1}{b^2} r e^{-rb} - \frac{r}{b} r e^{-rb} = -\frac{2}{b^3} (e^{-rb} - 1) - \frac{2r}{b^2} e^{-rb} - \frac{r^2}{b} e^{-rb} = \\ &= \frac{1}{b^3} [2 - (2 + 2br + b^2 r^2) e^{-rb}] = \frac{a^3}{8} \left[2 - \left(2 + 2\frac{2}{a} r + \frac{4}{a^2} r^2 \right) e^{-2r/a} \right] \end{aligned}$$

Підставляя знайдені у формулу для потенціала одержуємо

$$\begin{aligned}
\varphi_e(R) &= -\frac{e_0}{\varepsilon_0 \pi a^3} \left\{ \frac{1}{r} \int_0^r e^{-2r'/a} r'^2 dr' + \int_r^\infty e^{-2r'/a} r' dr' \right\} = \\
&= -\frac{e_0}{\varepsilon_0 \pi a^3} \left\{ \frac{1}{r} \frac{a^3}{8} \left[2 - \left(2 + 2\frac{2}{a}r + \frac{4}{a^2}r^2 \right) e^{-2r/a} \right] + \frac{a^2}{4} \left(1 + \frac{2r}{a} \right) e^{-2r/a} \right\} = \\
&= -\frac{e_0}{\varepsilon_0 \pi} \left\{ \frac{1}{8r} \left[2 - \left(2 + 2\frac{2}{a}r + \frac{4}{a^2}r^2 \right) e^{-2r/a} \right] + \frac{1}{4a} \left(1 + \frac{2r}{a} \right) e^{-2r/a} \right\} = \\
&= -\frac{e_0}{\varepsilon_0 \pi} \left\{ \frac{1}{4r} + \left[\frac{1}{4a} + \frac{r}{2a^2} - \frac{1}{4r} - \frac{1}{2a} - \frac{r}{2a^2} \right] e^{-2r/a} \right\} = \\
&= -\frac{e_0}{4\pi\varepsilon_0} \left\{ \frac{1}{r} - \left(\frac{1}{r} + \frac{1}{a} \right) e^{-2r/a} \right\}
\end{aligned}$$

В результаті для поля електронного облака в атомі маємо

$$\begin{aligned}
\varphi_e(r) &= -\frac{e_0}{4\pi\varepsilon_0} \left\{ \frac{1}{r} - \left(\frac{1}{r} + \frac{1}{a} \right) e^{-2r/a} \right\} = \\
&= -\frac{e_0}{4\pi\varepsilon_0 r} (1 - e^{-2r/a}) + \frac{e_0}{4\pi\varepsilon_0 a} e^{-2r/a}
\end{aligned}$$

Потенціал протонного заряду

$$\varphi_p(r) = \frac{e_0}{4\pi\varepsilon_0 r}$$

Потенціал повного поля

$$\varphi(r) = \varphi_e(r) + \frac{e_0}{4\pi\varepsilon_0 r}$$

Напруженість $\vec{E}_{er}$ електричного поля електронного заряду

$$\begin{aligned}
\vec{E}_{er} &= -\frac{d\varphi_e(r)}{dr} = \frac{d}{dr} \left[\frac{e_0}{4\pi\varepsilon_0 r} (1 - e^{-2r/a}) - \frac{e_0}{4\pi\varepsilon_0 a} e^{-2r/a} \right] \\
\vec{E}_{er} &= -\frac{e_0}{4\pi\varepsilon_0 r^2} (1 - e^{-2r/a}) + \frac{e_0}{2\pi\varepsilon_0 ar} e^{-2r/a} + \frac{e_0}{2\pi\varepsilon_0 a^2} e^{-2r/a} = \\
&= -\frac{e_0}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \left[1 - \left(1 + \frac{2r}{a} \right) e^{-2r/a} \right] + \frac{e_0}{2\pi\varepsilon_0 a^2} e^{-2r/a}
\end{aligned}$$

Задача 15(№87)

Знайти електричне поле φ і $\vec{E}$ на вісі рівномірно зарядженого круглого тонкого диску радіуса R заряд диска q .

Шукаємо поле за допомогою формули

$$\varphi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int_S \frac{\sigma(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} ds'$$

Тут

$$\sigma(\vec{r}') = \sigma = const$$

поверхнева густина заряду, причому

$$\begin{aligned}
q &= \int_S \sigma dS = \sigma \int_S dS = 4\pi R^2 \sigma \Rightarrow \\
\sigma &= \frac{q}{4\pi R^2}
\end{aligned}$$

Далі

$$\begin{aligned}\vec{r} &= x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k} \\ \vec{r}' &= x'\vec{i} + y'\vec{j} \\ \vec{r} - \vec{r}' &= (x - x')\vec{i} + (y - y')\vec{j} + z\vec{k} \Rightarrow \\ |\vec{r} - \vec{r}'| &= \sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2 + z^2}\end{aligned}$$

Тоді

$$\varphi(x, y, z) = \frac{\sigma}{4\pi\epsilon_0} \int_S \frac{ds'}{\sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2 + z^2}}$$

За умовою, треба знайти поле на осі

$$x = 0, \quad y = 0$$

Тому

$$\varphi(0, 0, z) = \frac{\sigma}{4\pi\epsilon_0} \int_S \frac{ds'}{\sqrt{x'^2 + y'^2 + z^2}}$$

Далі, перейдемо до циліндричної системи координат

$$\begin{aligned}\vec{r}' &= r'(\vec{i} \cos \alpha + \vec{j} \sin \alpha) \\ x' &= r' \cos \alpha, \quad y' = r' \sin \alpha, \\ r' &= \sqrt{x'^2 + y'^2}, \quad ds' = r' dr' d\alpha\end{aligned}$$

Тоді потенціал приймає вигляд

$$\varphi(0, 0, z) = \frac{\sigma}{4\pi\epsilon_0} \int_0^R \int_0^{2\pi} \frac{r' dr' d\alpha}{\sqrt{r'^2 + z^2}} = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \int_0^R \frac{r' dr'}{\sqrt{r'^2 + z^2}} = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \sqrt{r'^2 + z^2} \Big|_0^R = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} (\sqrt{R^2 + z^2} - |z|)$$

або

$$\varphi(0, 0, z) = \frac{q}{8\pi\epsilon_0 R^2} (\sqrt{R^2 + z^2} - |z|)$$

Поле шукаємо за формулой

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_S \frac{\sigma(\vec{r}')(\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} ds' = \frac{\sigma}{4\pi\epsilon_0} \int_S \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} ds'$$

Аналогічно одержуємо

$$\begin{aligned}\vec{r} - \vec{r}' &= -x'\vec{i} - y'\vec{j} + z\vec{k} \Rightarrow \\ |\vec{r} - \vec{r}'| &= \sqrt{x'^2 + y'^2 + z^2}\end{aligned}$$

$$\vec{E}(0, 0, z) = \frac{\sigma}{4\pi\epsilon_0} \int_S \frac{-x'\vec{i} - y'\vec{j} + z\vec{k}}{(x'^2 + y'^2 + z^2)^{3/2}} dx' dy' = \frac{\sigma}{4\pi\epsilon_0} \int_S \frac{-r'(\vec{i} \cos \alpha + \vec{j} \sin \alpha) + z\vec{k}}{(r'^2 + z^2)^{3/2}} r' dr' d\alpha$$

Далі маємо

$$\vec{E}(0, 0, z) = E_x(0, 0, z)\vec{i} + E_y(0, 0, z)\vec{j} + E_z(0, 0, z)\vec{k}$$

$$E_x(0, 0, z) = \frac{\sigma}{4\pi\epsilon_0} \int_0^R \int_0^{2\pi} \frac{-r' \cos \alpha}{(r'^2 + z^2)^{3/2}} r' dr' d\alpha = 0$$

$$E_y(0,0,z) = \frac{\sigma}{4\pi\epsilon_0} \int_0^R \int_0^{2\pi} \frac{-r' \sin \alpha}{(r'^2 + z^2)^{3/2}} r' dr' d\alpha = 0$$

$$E_z(0,0,z) = \frac{\sigma}{4\pi\epsilon_0} \int_0^R \int_0^{2\pi} \frac{z}{(r'^2 + z^2)^{3/2}} r' dr' d\alpha = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \int_0^R \frac{z}{(r'^2 + z^2)^{3/2}} r' dr' \Rightarrow$$

$$E_z(0,0,z) = \frac{\sigma z}{2\epsilon_0} \int_0^R \frac{r' dr'}{(r'^2 + z^2)^{3/2}} = -\frac{\sigma z}{2\epsilon_0} \frac{1}{\sqrt{r'^2 + z^2}} \Big|_0^R = \frac{\sigma z}{2\epsilon_0} \left(\frac{1}{|z|} - \frac{1}{\sqrt{R^2 + z^2}} \right)$$

Таким чином

$$E_z(0,0,z) = \frac{q}{8\pi\epsilon_0 R^2} \left(\frac{z}{|z|} - \frac{z}{\sqrt{R^2 + z^2}} \right)$$

Задача 16(№91)

Сфера радіуса R заряджена по поверхні за законом $\sigma = \sigma_0 \cos \theta$. Знайти потенціал φ електричного поля.

$$\sigma = \sigma_0 \cos \theta$$

Знаходимо розв'язок задачі за допомогою рівняння Лапласа

$$\Delta \varphi = 0$$

яке запишемо у сферичних координатах

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \alpha^2} = 0$$

де $\varphi = \varphi(r, \theta, \alpha)$. Оскільки сфера заряджена аксіально-симетрично, то природно шукати розв'язок цього рівняння аксіально симетричним, тобто

$$\varphi = \varphi(r, \theta)$$

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} \right) = 0$$

Далі, використовуємо метод поділу змінних. Маємо

$$\varphi(r, \theta) = \psi(r)f(\theta)$$

Тоді

$$\frac{f(\theta)}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial \psi(r)}{\partial r} \right) + \frac{\psi(r)}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial f(\theta)}{\partial \theta} \right) = 0 \Rightarrow$$

$$\frac{1}{\psi(r)} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial \psi(r)}{\partial r} \right) = -\frac{1}{f(\theta) \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial f(\theta)}{\partial \theta} \right) = \lambda$$

де λ – стала поділу. Звідси знаходимо

$$\frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{d\psi(r)}{dr} \right) = \lambda \psi(r)$$

$$\frac{1}{\sin \theta} \frac{d}{d\theta} \left(\sin \theta \frac{df(\theta)}{d\theta} \right) = -\lambda f(\theta)$$

Оскільки розподіл заряду на сфері $r = R$ має вид $\sigma = \sigma_0 \cos \theta$, то природно шукати кутову залежність функції $f(\theta)$ у такому жевиді, тобто

$$f(\theta) = a \cos \theta$$

Тоді

$$\frac{df(\theta)}{d\theta} = -a \sin \theta$$
$$\frac{d}{d\theta} \left(\sin \theta \frac{df(\theta)}{d\theta} \right) = -a \frac{d}{d\theta} (\sin^2 \theta) = -2a \sin \theta \cos \theta$$

Нарешті кутове рівняння дає

$$\frac{1}{\sin \theta} \frac{d}{d\theta} \left(\sin \theta \frac{df(\theta)}{d\theta} \right) = -2a \cos \theta = -\lambda a \cos \theta$$

Звідси впливає значення сталої поділу

$$\lambda = 2$$

Підставимо це значення у радіальне рівняння

$$\frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{d\psi(r)}{dr} \right) = 2\psi(r)$$

Шукаємо розв'язок цього рівняння у вигляді

$$\psi = r^l$$

Тоді радіальне рівняння дає

$$\frac{d}{dr} (lr^{l+1}) = l(l+1)r^l = 2r^l$$

Звідси одержимо характеристичне рівняння

$$l^2 + l - 2 = 0$$

Його розв'язки

$$l_1 = 1, \quad l_2 = -2$$

Таким чином загальний розв'язок рівня Лапласа має вид

$$\varphi(r, \theta) = \left(C_1 r + \frac{C_2}{r^2} \right) \cos \theta$$

Система має дві області:

1) : $r < R$ – внутрішня область

2) : $r > R$ – зовнішня область

і границю розділу

$$r = R$$

Усередені сфери вимога регулярності дає

$$C_2 = 0 \Rightarrow$$

$$\varphi_1(r, \theta) = C_1 r \cos \theta, \quad r < R$$

Зовні сфери вимога регулярності на бескінченності дає

$$C_1 = 0 \Rightarrow$$

$$\varphi_2(r, \theta) = \frac{C_2}{r^2} \cos \theta, \quad r > R$$

Отже

$$\varphi(r, \theta) = \begin{cases} C_1 r \cos \theta, & r < R \\ \frac{C_2}{r^2} \cos \theta, & r > R \end{cases}$$

Сталі C_1 і C_2 знаходяться з умов поведінки потенціалу на заряджених поверхнях

$$\begin{aligned} [\varphi^{(2)} - \varphi^{(1)}]_S &= 0 \\ \left[\frac{\partial \varphi^{(2)}}{\partial n} - \frac{\partial \varphi^{(1)}}{\partial n} \right]_S &= -\frac{\sigma}{\epsilon_0} = -\frac{\sigma_0}{\epsilon_0} \cos \theta \end{aligned}$$

В данному випадку заряджена поверхня – це сфера $r = R$. З умови безперервності потенціала маємо

$$C_1 R = \frac{C_2}{R^2} \Rightarrow C_1 = \frac{C_2}{R^3}$$

Оскільки, у випадку сфери, маємо

$$\frac{\partial \varphi}{\partial n} = \frac{d\varphi}{dr}$$

то друге рівняння перепишемо так

$$\left[\frac{d\varphi^{(2)}}{dr} - \frac{d\varphi^{(1)}}{dr} \right]_{r=R} = -\frac{\sigma}{\epsilon_0}$$

Звідси

$$\begin{aligned} -2 \frac{C_2}{R^3} \cos \theta - \frac{C_2}{R^3} R \cos \theta &= -\frac{\sigma_0}{\epsilon_0} \cos \theta \\ 3 \frac{C_2}{R^3} = \frac{\sigma_0}{\epsilon_0} \Rightarrow C_2 &= \frac{\sigma_0}{3\epsilon_0} R^3 \Rightarrow C_1 = \frac{C_2}{R^3} = \frac{\sigma_0}{3\epsilon_0} \end{aligned}$$

Таким чином одержуємо

$$\varphi(r, \theta) = \begin{cases} \frac{\sigma_0}{3\epsilon_0} r \cos \theta, & r < R \\ \frac{\sigma_0}{3\epsilon_0} \frac{R^3}{r^2} \cos \theta, & r > R \end{cases}$$

Задача 17а (№94)

Знайти поле φ на великих відстанях від системи зарядів $q, -2q, q$, розміщених по осі z на відстані a один від одного (лінійний квадруполь).

Система має такі параметри

$$\begin{aligned} q_1 &= q, & q_2 &= -2q, & q_3 &= q \\ \vec{r}_1 &= -\vec{a}, & \vec{r}_2 &= 0, & \vec{r}_3 &= \vec{a} = a\vec{k} \end{aligned}$$

Заряд системи

$$Q = \sum_a^3 q_a = q - 2q + q = 0$$

Дипольний момент системи

$$\vec{d} = \sum_a^3 q_a \vec{r}_a = q(-a) - 2q(0) + q(a) = 0$$

Квадрупольний момент систем

$$Q_{ij} = \sum_a^3 q_a (3x_i^{(a)} x_j^{(a)} - r_{(a)}^2 \delta_{ij})$$

$$r_{(1)}^2 = r_{(3)}^2 = a^2, \quad r_{(2)}^2 = 0.$$

Розглянемо спочатку діагональні компоненти квадрупольного моменту

$$i = j \Rightarrow$$

$$Q_{11} = \sum_a^3 q_a (3(x_1^{(a)})^2 - r_{(a)}^2) = -\sum_a^3 q_a r_{(a)}^2 = -q_1 r_{(1)}^2 - q_3 r_{(3)}^2 = -2qa^2$$

$$Q_{22} = \sum_a^3 q_a (3(x_2^{(a)})^2 - r_{(a)}^2) = -\sum_a^3 q_a r_{(a)}^2 = -2qa^2$$

$$Q_{33} = \sum_a^3 q_a (3(x_3^{(a)})^2 - r_{(a)}^2) =$$

$$= q[3a^2 - a^2 + 3a^2 - a^2] = 4qa^2$$

Недіагональні компоненти квадрупольного моменту

$$i \neq j \Rightarrow Q_{ij} = 3 \sum_a^3 q_a x_i^{(a)} x_j^{(a)} = 3q(x_i^{(1)} x_j^{(1)} - 2x_i^{(2)} x_j^{(2)} + x_i^{(3)} x_j^{(3)}) = 0$$

Потенціал

$$\varphi(\vec{r}) = \frac{Q}{r} + \frac{\vec{d} \cdot \vec{r}}{r^3} + \frac{Q_{ij} x_i x_j}{2r^5} + \dots$$

Для даної системи

$$\varphi(\vec{r}) = \frac{Q_{ij} x_i x_j}{2r^5} = \frac{Q_{11}(x_1)^2 + Q_{22}(x_2)^2 + Q_{33}(x_3)^2}{2r^5}$$

$$\varphi(\vec{r}) = \frac{-2qa^2 x^2 - 2qa^2 y^2 + 4qa^2 z^2}{2r^5} = \frac{qa^2(-x^2 - y^2 + 2z^2)}{r^5}$$

Перейдемо до сферичної системи координат

$$x = r \sin \theta \cos \alpha, \quad y = r \sin \theta \sin \alpha, \quad z = r \cos \theta$$

Тоді

$$\varphi(\vec{r}) = \frac{qa^2(-\sin^2 \theta + 2 \cos^2 \theta)}{r^3} = \frac{qa^2(3 \cos^2 \theta - 1)}{r^3} = 2qa^2 \frac{P_2(\cos \theta)}{r^3}$$

Задача 17b (№94)

Знайти поле φ на великих відстанях від такої системи зарядів: заряди $\pm q$ розташовані у вершинах квадрата зі стороною a так, що сусідні заряди мають різні знаки, причому на початку координат знаходиться заряд $+q$, а сторони квадрата паралельні осям x і y (плоский квадруполь).

Система має такі параметри

$$\begin{aligned}
q_1 &= q, & q_2 &= -q, & q_3 &= q, & q_4 &= -q \\
\vec{r}_1 &= 0, & \vec{r}_2 &= a\vec{i}, & \vec{r}_3 &= a(\vec{i} + \vec{j}), & \vec{r}_4 &= a\vec{j} \\
(\vec{r}_1)^2 &= 0, & (\vec{r}_2)^2 &= a^2, & (\vec{r}_3)^2 &= 2a^2, & (\vec{r}_4)^2 &= a^2
\end{aligned}$$

Заряд системи

$$Q = \sum_a^4 q_a = q - q + q - q = 0$$

Дипольний момент системи

$$\vec{d} = \sum_a^4 q_a \vec{r}_a = q \cdot 0 - q \cdot a\vec{i} + q \cdot a(\vec{i} + \vec{j}) - q \cdot a\vec{j} = 0$$

Квадрупольний момент систем

$$\begin{aligned}
Q_{ij} &= \sum_a^4 q_a (3x_i^{(a)} x_j^{(a)} - r_{(a)}^2 \delta_{ij}) = 3 \sum_a^4 q_a x_i^{(a)} x_j^{(a)} - \delta_{ij} \sum_a^4 q_a r_{(a)}^2 = \\
&= 3q(-x_i^{(2)} x_j^{(2)} + x_i^{(3)} x_j^{(3)} - x_i^{(4)} x_j^{(4)}) - q\delta_{ij}(-r_{(2)}^2 + r_{(3)}^2 - r_{(4)}^2) \\
&= 3q(-x_i^{(2)} x_j^{(2)} + x_i^{(3)} x_j^{(3)} - x_i^{(4)} x_j^{(4)}) - q\delta_{ij}(-a^2 + 2a^2 - a^2) = \\
&= 3q(-x_i^{(2)} x_j^{(2)} + x_i^{(3)} x_j^{(3)} - x_i^{(4)} x_j^{(4)})
\end{aligned}$$

Отже

$$Q_{ij} = 3q(-x_i^{(2)} x_j^{(2)} + x_i^{(3)} x_j^{(3)} - x_i^{(4)} x_j^{(4)})$$

Діагональні компоненти квадрупольного моменту

$$i = j \Rightarrow$$

$$Q_{ii} = 3q(-(x_i^{(2)})^2 + (x_i^{(3)})^2 - (x_i^{(4)})^2) \Rightarrow$$

$$Q_{11} = 3q(-a^2 + a^2) = 0$$

$$Q_{22} = 3q(a^2 - a^2) = 0$$

$$Q_{33} = 0$$

Недіагональні компоненти квадрупольного моменту

$$i \neq j \Rightarrow$$

$$Q_{12} = 3q(-x_1^{(2)} x_2^{(2)} + x_1^{(3)} x_2^{(3)} - x_1^{(4)} x_2^{(4)}) = 3q(-0 + a^2 - 0) = 3qa^2$$

$$Q_{13} = 3q(-x_1^{(2)} x_3^{(2)} + x_1^{(3)} x_3^{(3)} - x_1^{(4)} x_3^{(4)}) = 3q(-0 + 0 - 0) = 0$$

$$Q_{23} = 3q(-x_2^{(2)} x_3^{(2)} + x_2^{(3)} x_3^{(3)} - x_2^{(4)} x_3^{(4)}) = 3q(-0 + 0 - 0) = 0$$

Потенціал даної системи

$$\varphi(\vec{r}) = \frac{Q_{ij} x_i x_j}{2r^5} = \frac{Q_{12} x_1 x_2}{2r^5} = \frac{3qa^2 x_1 x_2}{2r^5}$$

Перейдемо до сферичної системи координат

$$x = r \sin \theta \cos \alpha, \quad y = r \sin \theta \sin \alpha, \quad z = r \cos \theta$$

Тоді

$$\varphi(\vec{r}) = \frac{3qa^2 \sin^2 \theta \cos \alpha \sin \alpha}{2r^3}$$

Задача 18 (№97)

Еліпсоїд з півосями a, b, c рівномірно заряджений по об'єму; повний заряд еліпсоїда q . Знайти потенціал φ на великих відстанях від еліпсоїда з точністю до квадрупольного члена.

Розглянути окремі випадки еліпсоїда обертання з півосями $a = b, c$ і кулі ($a = b = c$).

Потенціал на великих відстанях з точністю до квадрупольного члена має вигляд

$$\varphi(\vec{r}) = \frac{Q}{r} + \frac{\vec{d} \cdot \vec{r}}{r^3} + \frac{Q_{ij}x_i x_j}{2r^5} + \dots$$

Звідси знаходимо

$$Q = \int \rho dv = \rho V$$

Де

$$V = \iiint dx dy dz$$

об'єм еліпсоїда. Рівняння еліпсоїда з півосями a, b, c

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

в результаті перетворення координат

$$x = ax' = ar \sin \theta \cos \alpha,$$

$$y = by' = br \sin \theta \sin \alpha,$$

$$z = cz' = br \cos \theta$$

приймає вид

$$x'^2 + y'^2 + z'^2 = r^2 = 1$$

Тоді для об'єма маємо

$$V = \iiint dx dy dz = abc \iiint dx' dy' dz' = abc \int_0^{r=1} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi r^2 dr \sin \theta d\theta d\alpha = \frac{4}{3} \pi abc$$

Таким чином заряд q

$$q = \rho V = \frac{4}{3} \pi abc \rho$$

Дипольний момент системи

$$\vec{d} = \int \rho(\vec{r}) \vec{r} dV$$

$$d_i = \int \rho x_i dV = \rho \int x_i dV = \rho abc a_i \int x'_i dV' = \rho abc a_i q_i$$

Треба знайти величину

$$q_i = \int x'_i dV'$$

Щоб знати її, помножимо обі сторони цієї рівності на постійний вектор $\vec{L} = const$:

$$(\vec{L} \cdot \vec{q}) = \int (\vec{L} \cdot \vec{r}) dV' = \int_0^1 r dr \oint (\vec{L} \cdot \vec{n}) ds = \int_0^1 r dr \oint (\vec{L} \cdot d\vec{s}) = \int_0^1 r dr \int_{D_1} \text{div}(\vec{L}) dV' = 0$$

Таким чином

$$(\vec{L} \cdot \vec{q}) = 0 \forall \vec{L} = const \Rightarrow \vec{q} = 0$$

Звідси

$$d_i = \rho abca_i q_i = 0$$

Квадрупольний момент систем

$$Q_{ij} = \int \rho(3x_i x_j - r^2 \delta_{ij}) dv = \rho \int (3x_i x_j - r^2 \delta_{ij}) dv = \rho q_{ij}$$

$$q_{ij} = \int (3x_i x_j - r^2 \delta_{ij}) dx dy dz = abc \int (3x_i x_j - r^2 \delta_{ij}) dx' dy' dz'$$

Діагональні компоненти квадрупольного моменту

$$i = j = 1, 2, 3 \Rightarrow$$

$$q_{xx} = abc \int (2a^2 x'^2 - b^2 y'^2 - c^2 z'^2) dx' dy' dz'$$

Перейдемо до сферичної системи координат

$$x' = r \sin \theta \cos \alpha,$$

$$y' = r \sin \theta \sin \alpha,$$

$$z' = r \cos \theta$$

$$q_{xx} = abc \int_0^1 \int_0^{2\pi} \int_0^\pi r^2 (2a^2 \sin^2 \theta \cos^2 \alpha - b^2 \sin^2 \theta \sin^2 \alpha - c^2 \cos^2 \theta) r^2 dr \sin \theta d\theta d\alpha$$

Враховуючи співвідношення

$$\int_0^{2\pi} \cos^2 \alpha d\alpha = \int_0^{2\pi} \sin^2 \alpha d\alpha = \pi$$

$$\int_0^{2\pi} d\alpha = 2\pi$$

отримуємо

$$q_{xx} = \pi abc \int_0^1 \int_0^\pi r^4 [(2a^2 - b^2) \sin^2 \theta - 2c^2 \cos^2 \theta] dr \sin \theta d\theta$$

Далі, використовуємо формули

$$\int_0^\pi \sin^2 \theta \sin \theta d\theta = - \int_0^\pi (1 - \cos^2 \theta) d \cos \theta = -\cos \theta - \frac{\cos^3 \theta}{3} \Big|_0^\pi = -\left(-2 + \frac{2}{3}\right) = \frac{4}{3}$$

$$\int_0^\pi \cos^2 \theta \sin \theta d\theta = - \int_0^\pi \cos^2 \theta d \cos \theta = -\frac{\cos^3 \theta}{3} \Big|_0^\pi = \frac{2}{3}$$

Тоді

$$q_{xx} = \pi abc \int_0^1 \int_0^\pi r^4 [(2a^2 - b^2) \sin^2 \theta - 2c^2 \cos^2 \theta] dr \sin \theta d\theta =$$

$$= \frac{4}{3} \pi abc \int_0^1 [2a^2 - b^2 - c^2] r^4 dr = \frac{4}{15} \pi abc [2a^2 - b^2 - c^2]$$

або

$$q_{xx} = \frac{1}{5} (2a^2 - b^2 - c^2) V$$

де

$$V = \frac{4}{3} \pi abc$$

$$q = \frac{4}{3} \pi abc \rho$$

Таким чином

$$Q_{ij} = \rho q_{ij}$$

$$Q_{xx} = \frac{\rho}{5} (2a^2 - b^2 - c^2) V = \frac{q}{5} (2a^2 - b^2 - c^2)$$

Аналогічно знаходимо

$$Q_{yy} = \frac{\rho}{5} (2b^2 - a^2 - c^2) V = \frac{q}{5} (2b^2 - a^2 - c^2)$$

$$Q_{zz} = \frac{\rho}{5} (2c^2 - a^2 - b^2) V = \frac{q}{5} (2c^2 - a^2 - b^2)$$

Недіагональні компоненти квадрупольного моменту

$$i \neq j \Rightarrow$$

$$Q_{ij} = \rho q_{ij}$$

$$q_{ij} = abc \int (3x_i x_j - r^2 \delta_{ij}) dx' dy' dz'$$

$$q_{xy} = 3abc \int xy dx' dy' dz' = 3a^2 b^2 c \int x' y' dx' dy' dz'$$

$$x' = r \sin \theta \cos \alpha,$$

$$y' = r \sin \theta \sin \alpha,$$

$$z' = r \cos \theta$$

$$q_{xy} = 3a^2 b^2 c \int r^4 \sin \theta \cos \alpha \sin \theta \sin \alpha dr \sin \theta d\theta d\alpha = 3a^2 b^2 c \int_0^1 r^4 dr \int_0^\pi \sin^3 \theta d\theta \int_0^{2\pi} \cos \alpha \sin \alpha d\alpha$$

$$\int_0^{2\pi} \cos \alpha \sin \alpha d\alpha = - \int_0^{2\pi} \cos \alpha d \cos \alpha = - \frac{\cos^2 \alpha}{2} \Big|_0^{2\pi} = - \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \right) = 0$$

Отже

$$q_{xy} = 0 \Rightarrow Q_{xy} = 0$$

За аналогією

$$Q_{xy} = Q_{xz} = Q_{yz} = 0$$

Таким чином потенціал φ на великих відстанях від еліпсоїда з точністю до

квадрупольного члена має вигляд

$$\varphi(\vec{r}) \approx \frac{q}{r} + \frac{Q_{xx}x^2 + Q_{yy}y^2 + Q_{zz}z^2}{2r^5}$$

$$Q_{xx} = \frac{q}{5}(2a^2 - b^2 - c^2)$$

$$Q_{yy} = \frac{q}{5}(2b^2 - a^2 - c^2)$$

$$Q_{zz} = \frac{q}{5}(2c^2 - a^2 - b^2)$$

$$q = \frac{4}{3}\pi abc\rho$$

Або

$$\begin{aligned}\varphi(\vec{r}) &\approx \frac{q}{r} + \frac{q}{5} \frac{(2a^2 - b^2 - c^2)x^2 + (2b^2 - a^2 - c^2)y^2 + (2c^2 - a^2 - b^2)z^2}{2r^5} = \\ &= \frac{q}{r} + \frac{q}{5} \frac{2a^2x^2 - b^2x^2 - c^2x^2 + 2b^2y^2 - a^2y^2 - c^2y^2 + 2c^2z^2 - a^2z^2 - b^2z^2}{2r^5} = \\ &= \frac{q}{r} + \frac{q}{5} \frac{a^2(2x^2 - y^2 - z^2) + b^2(2y^2 - x^2 - z^2) + c^2(2z^2 - x^2 - y^2)}{2r^5} = \\ &= \frac{q}{r} + q \frac{a^2(3x^2 - r^2) + b^2(3y^2 - r^2) + c^2(3z^2 - r^2)}{10r^5}\end{aligned}$$

Таким чином

$$\varphi(\vec{r}) \approx \frac{q}{r} + q \frac{a^2(3x^2 - r^2) + b^2(3y^2 - r^2) + c^2(3z^2 - r^2)}{10r^5}$$

У випадку еліпсоїда обертання з півосями $a = b$, c ми маємо

$$\begin{aligned}\varphi(\vec{r}) &\approx \frac{q}{r} + q \frac{a^2(3y^2 - r^2 + 3x^2 - r^2) + c^2(3z^2 - r^2)}{10r^5} = \\ &= \frac{q}{r} + q \frac{a^2(3y^2 + 3x^2 - 2r^2) + c^2(3z^2 - r^2)}{10r^5}\end{aligned}$$

$$x = r \sin \theta \cos \alpha,$$

$$y = r \sin \theta \sin \alpha,$$

$$z = r \cos \theta$$

$$\varphi(\vec{r}) \approx \frac{q}{r} + q \frac{a^2(3 \sin^2 \theta - 2) + c^2(3 \cos^2 \theta - 1)}{10r^3} = \frac{q}{r} + q \frac{a^2(1 - 3 \cos^2 \theta) + c^2(3 \cos^2 \theta - 1)}{10r^3}$$

$$\varphi(\vec{r}) \approx \frac{q}{r} + q \frac{(c^2 - a^2)(3 \cos^2 \theta - 1)}{10r^3} = \frac{q}{r} + \frac{q(c^2 - a^2)}{5} \frac{P_2(\cos \theta)}{r^3}$$

$$P_2(\cos \theta) = \frac{1}{2}(3 \cos^2 \theta - 1)$$

У випадк кулі ($a = b = c$) маємо

$$\varphi(\vec{r}) \approx \frac{q}{r} + q \frac{a^2(3x^2 - r^2) + a^2(3y^2 - r^2) + a^2(3z^2 - r^2)}{10r^5} = \frac{q}{r}$$

Задача 19 (№119)

Яким розподілом зарядів створюється потенціал, який в сферичних

координатах має вид

$$\varphi(\vec{r}) = \frac{q}{r} e^{-ar}$$

де α і q – сталі.

Розглянемо рівняння Пуассона

$$\Delta\varphi = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

Щоб скористатися цим рівнянням потрібно з потенціалу виділити сингулярну частину. Для цього зробимо деякі перетворення

$$\varphi(\vec{r}) = \frac{q}{r} e^{-ar} = q \frac{e^{-ar} - 1}{r} + \frac{q}{r}$$

Ми бачимо, що перший доданок

$$\lim_{r \rightarrow 0} \frac{e^{-ar} - 1}{r} = \left(\frac{0}{0} \right) = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{-ae^{-ar}}{1} = -\alpha$$

цілком регулярний. Тому ми маємо

$$\begin{aligned} \Delta\varphi &= q\Delta\left(\frac{e^{-ar} - 1}{r}\right) + q\Delta\frac{1}{r} \\ &= q\frac{1}{r} \frac{d^2}{dr^2} r \left(\frac{e^{-ar} - 1}{r}\right) - 4\pi q\delta(\vec{r}) = \\ &= q\alpha^2 \frac{e^{-ar}}{r} - 4\pi q\delta(\vec{r}) = -\frac{\rho}{\varepsilon_0} \end{aligned}$$

Таким чином, маємо позитивний точковий заряд у початку координат і сферично симетрично розподілений об'ємний заряд з густиною

$$\rho = -q\varepsilon_0\alpha^2 \frac{e^{-ar}}{r}$$

Задача 20 (№120)

Яким має бути розподіл зарядів, щоб створений ним потенціал в сферичних координатах мав вигляд

$$\varphi(\vec{r}) = \frac{e_0}{a} e^{-2r/a} \left(\frac{a}{r} + 1 \right)$$

де e_0 і a – сталі.

Щоб скористатися рівнянням Пуассона

$$\Delta\varphi = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

потрібно з потенціалу виділити сингулярну частину (див. задачу 19). Для цього зробимо перетворення

$$e^{-2r/a} \left(\frac{a}{r} + 1 \right) = \alpha \frac{e^{-2r/a}}{r} + e^{-2r/a} = \alpha \frac{e^{-2r/a} - 1}{r} + \frac{\alpha}{r} + e^{-2r/a}$$

Тут перше і третє вирази регулярні. Тому маємо

$$\begin{aligned}
\Delta\varphi &= \frac{e_0}{a} \left(\alpha \Delta \frac{e^{-2r/a} - 1}{r} + \Delta e^{-2r/a} + \Delta \frac{\alpha}{r} \right) = \\
&= \frac{e_0}{a} \left[\alpha \frac{1}{r} \frac{d^2}{dr^2} r \left(\frac{e^{-2r/a} - 1}{r} \right) + \frac{1}{r} \frac{d^2}{dr^2} r (e^{-2r/a}) - 4\pi\alpha\delta(\vec{r}) \right] = \\
&= \frac{e_0}{a} \left(\frac{\alpha}{r} \frac{d^2}{dr^2} e^{-2r/a} + \frac{1}{r} \frac{d^2}{dr^2} r e^{-2r/a} \right) - 4\pi e_0 \delta(\vec{r}) \\
&= \frac{e_0}{a} \left(\frac{\alpha}{r} \frac{4}{\alpha^2} e^{-2r/a} + \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(1 - \frac{2r}{\alpha} \right) e^{-2r/a} \right) - 4\pi e_0 \delta(\vec{r}) \\
&= \frac{e_0}{a} \left[\frac{4}{\alpha r} e^{-2r/a} + \frac{4}{\alpha r} \left(-1 + \frac{r}{\alpha} \right) e^{-2r/a} \right] - 4\pi e_0 \delta(\vec{r}) \\
&= \frac{4e_0}{\alpha^2 r} \left[e^{-2r/a} - e^{-2r/a} + \frac{r}{\alpha} e^{-2r/a} \right] - 4\pi e_0 \delta(\vec{r}) = \\
&= \frac{4e_0}{\alpha^3} e^{-2r/a} - 4\pi e_0 \delta(\vec{r})
\end{aligned}$$

Таким чином, маємо точковий заряд в у початку координат, оточений об'ємним зарядом з густиною

$$\rho = \frac{4e_0\epsilon_0}{\alpha^3} e^{-2r/a}$$

Задача 21 (№123)

Центри двох куль з зарядами q_1 і q_2 знаходяться на відстані a один від одного. Заряди розподілені сферически симетричним чином. Знайти енергію взаємодії U куль і діючу між ними силу F .

Енергія взаємодії двох систем зарядів у областях D_1 і D_2 є

$$\mathcal{E}_{int} = \int_{D_1} \rho_1(\vec{r}_1) \varphi_2(\vec{r}_1) dv_1$$

де $\rho_1(\vec{r}_1)$ – густина заряду в області D_1 , а

$$\varphi_2(\vec{r}_1) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{D_2} \frac{\rho_2(\vec{r}_2)}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|} dv_2$$

потенціал, що породжується другою системою з густиною заряду $\rho_2(\vec{r}_2)$ у області D_2 .

Звідси випливає

$$\mathcal{E}_{int} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{D_1} \int_{D_2} \frac{\rho_1(\vec{r}_1) \rho_2(\vec{r}_2)}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|} dv_1 dv_2$$

Врахуємо тепер, що системи сферично симетричні, тобто області D_1 і D_2 , це кулі радіусів R_1 і R_2 .

Потенціал зарядженої кулі D_2 у точці r , де $|\vec{r} - \vec{r}'_2| > R_2$ і $\vec{r}'_2$ – центр другої кулі O_2 , можна також знайти за формулою

$$\varphi_2(\vec{r}) = \frac{q_2}{4\pi\epsilon_0 |\vec{r} - \vec{r}'_2|}$$

де

$$q_2 = 4\pi \int_0^{R_2} \rho_2(\tilde{r}) \tilde{r}^2 d\tilde{r}$$

Тоді енергії взаємодії куль можна записати таким чином

$$\mathcal{E}_{int} = \int_{D_1} \rho_1(\vec{r}_1) \varphi_2(\vec{r}_1) dv_1 = \int_{D_1} \rho_1(\vec{r}_1) \frac{q_2}{4\pi\epsilon_0 |\vec{r}_1 - \vec{r}'_2|} dv_1$$

Виберемо сферичну систему координат з началом у центрі першої кулі O_1 , так, щоб пряма, що з'єднує центри куль O_1 і O_2 проходила через вісь OZ

Тоді

$$\mathcal{E}_{int} = \frac{q_2}{4\pi\epsilon_0} \int_{D_1} \frac{\rho_1(r_1)}{|\vec{r}_1 - \vec{r}'_2|} r_1^2 dr_1 \sin\theta d\theta d\alpha$$

Тепер $\vec{r}'_2$ – вектор, що з'єднує центр нової системи координат з центром другої кулі, тому $\vec{r}'_2 = -\vec{a}$. Отже

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_{int} &= \frac{q_2}{4\pi\epsilon_0} \int_{D_1} \frac{\rho_1(r_1)}{|\vec{r}_1 + \vec{a}|} r_1^2 dr_1 \sin\theta d\theta d\alpha = \frac{q_2}{4\pi\epsilon_0} \int_{r_1}^{R_1} \rho_1(r_1) r_1^2 dr_1 \int_0^\pi \frac{\sin\theta d\theta}{\sqrt{r_1^2 + a^2 + 2ar_1 \cos\theta}} \int_0^{2\pi} d\alpha = \\ \mathcal{E}_{int} &= \frac{q_2}{2\epsilon_0} \int_{r_1}^{R_1} \rho_1(r_1) r_1^2 dr_1 \int_0^\pi \frac{\sin\theta d\theta}{\sqrt{r_1^2 + a^2 + 2ar_1 \cos\theta}} = -\frac{q_2}{2\epsilon_0} \int_{r_1}^{R_1} \rho_1(r_1) r_1^2 dr_1 \frac{\sqrt{r_1^2 + a^2 + 2ar_1 \cos\theta}}{ar_1} \Big|_0^\pi = \\ &= -\frac{q_2}{2\epsilon_0 a} \int_{r_1}^{R_1} \rho_1(r_1) r_1 dr_1 \left\{ \sqrt{r_1^2 + a^2 - 2ar_1} - \sqrt{r_1^2 + a^2 + 2ar_1} \right\} = \\ &= \frac{q_2}{2\epsilon_0 a} \int_{r_1}^{R_1} \rho_1(r_1) r_1 dr_1 \{ |r_1 + a| - |r_1 - a| \} \end{aligned}$$

Оскільки

$$r_1 < a \Rightarrow |r_1 - a| = a - r_1$$

Отже

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_{int} &= \frac{q_2}{2\epsilon_0 a} \int_{r_1}^{R_1} \rho_1(r_1) r_1 dr_1 \{ r_1 + a - a + r_1 \} = \frac{q_2}{\epsilon_0 a} \int_{r_1}^{R_1} \rho_1(r_1) r_1^2 dr_1 = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0 a} \\ \mathcal{E}_{int} &= \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0 a} \end{aligned}$$

Сила взаємодії буде

$$F_{int} = -\frac{\partial \mathcal{E}_{int}}{\partial a} = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0 a^2}$$

Задача 22 (№126)

Знайти силу $\vec{F}$ і обертальний момент $\vec{N}$, прикладені до електричного диполя з моментом $\vec{d}$ у полі точкового заряду q .

а) Силу $\vec{F}$ можна знайти за формулою

$$\vec{F} = (\vec{\nabla}) \vec{E}(\vec{r})$$

де

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3}$$

поле заряду q , що знаходиться у точці з радіусом вектором $\vec{r}'$. Підставля $\vec{E}(\vec{r})$ у $\vec{F}$

одержуємо

$$\vec{F} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} (\vec{\nabla}) \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{|\vec{r} - \vec{r}'|^3 (\vec{\nabla}) (\vec{r} - \vec{r}') - (\vec{r} - \vec{r}') (\vec{\nabla}) |\vec{r} - \vec{r}'|^3}{|\vec{r} - \vec{r}'|^6}$$

Далі маємо

$$(\vec{\nabla}) (\vec{r} - \vec{r}') = (\vec{\nabla}) \vec{r} = \vec{d}$$

$$(\vec{\nabla}) |\vec{r} - \vec{r}'|^3 = 3|\vec{r} - \vec{r}'|^2 (\vec{\nabla}) |\vec{r} - \vec{r}'| = 3|\vec{r} - \vec{r}'|^2 \frac{(\vec{d}, \vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} = 3|\vec{r} - \vec{r}'| (\vec{d}, \vec{r} - \vec{r}')$$

Тут використані такі обчислення

$$\begin{aligned} (\vec{\nabla}) |\vec{r} - \vec{r}'| &= (\vec{\nabla}) \sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2} = \frac{(\vec{\nabla}) [(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2]}{2|\vec{r} - \vec{r}'|} = \\ &= \frac{d_x(x - x') + d_y(y - y') + d_z(z - z')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} = \frac{(\vec{d}, \vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \end{aligned}$$

Отже

$$\vec{F} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{|\vec{r} - \vec{r}'|^3 \vec{d} - (\vec{r} - \vec{r}') 3|\vec{r} - \vec{r}'| (\vec{d}, \vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^6} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{|\vec{r} - \vec{r}'|^2 \vec{d} - 3(\vec{r} - \vec{r}') (\vec{d}, \vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^5}$$

Ведемо початок координат у точці, де знаходиться заряд. Тому

$$\vec{r}' = 0$$

Введемо одиничний вектор

$$\vec{n} = \frac{\vec{r}}{r}$$

Тоді

$$\vec{F} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{d} - 3\vec{n}(\vec{d}, \vec{n})}{r^3}$$

б) Обертальний момент $\vec{N}$, прикладений до електричного диполя з моментом $\vec{d}$ у полі точкового заряду q можна знайти за формулою

$$\vec{N} = [\vec{r}, \vec{F}] = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left[\vec{r}, \frac{\vec{d} - 3\vec{n}(\vec{d}, \vec{n})}{r^3} \right] = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{[\vec{r}, \vec{d}]}{r^3}$$

Оскільки

$$[\vec{r}, \vec{n}] = 0$$

Таким чином

$$\vec{N} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{[\vec{r}, \vec{d}]}{r^3}$$

Задача 23 (№127)

Диполь з моментом $\vec{d}_1$ знаходиться на початку координат, а інший диполь з моментом $\vec{d}_2$ - у точці з радіусом-вектором $\vec{r}$. Знайти енергію взаємодії цих диполів $\mathcal{E}_{int}$ і діючу між ними силу F_{int} . При якій орієнтації диполів ця сила максимальна?

Енергію взаємодії диполів шукаємо за формулою

$$\mathcal{E}_{int} = -(\vec{d}_1, \vec{E}_2)$$

де

$$\vec{E}_2 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{3\vec{r}(\vec{r} \cdot \vec{d}_2) - r^2\vec{d}_2}{r^5} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{3\vec{n}(\vec{n} \cdot \vec{d}_2) - \vec{d}_2}{r^3}$$

$$\vec{n} = \frac{\vec{r}}{r}$$

поле другого диполя, що знаходиться у початку координат. Після підстановки $\vec{E}_2$ у $\mathcal{E}_{int}$ маємо

$$\mathcal{E}_{int} = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\vec{d}_1, \frac{3\vec{n}(\vec{n} \cdot \vec{d}_2) - \vec{d}_2}{r^3} \right) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{d}_1 \cdot \vec{d}_2 - 3(\vec{n} \cdot \vec{d}_1)(\vec{n} \cdot \vec{d}_2)}{r^3}$$

Введемо кути

$$\theta_1 = \angle(\vec{r} \cdot \vec{d}_1), \quad \theta_2 = \angle(\vec{r} \cdot \vec{d}_2)$$

$$\alpha = \angle(\vec{d}_1 \cdot \vec{d}_2)$$

Тоді маємо

$$\mathcal{E}_{int} = \frac{d_1 d_2}{4\pi\epsilon_0} \frac{\cos \alpha - 3 \cos \theta_1 \cos \theta_2}{r^3}$$

Силу взаємодії диполей знаходимо за формулою

$$F_{int} = -\frac{\partial \mathcal{E}_{int}}{\partial r} = \frac{3d_1 d_2}{4\pi\epsilon_0} \frac{\cos \alpha - 3 \cos \theta_1 \cos \theta_2}{r^4}$$